



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

Fernando Guimarães Oliveira Mota

**Análise do efeito da não linearidade física em um elemento de barra de
Euler-Bernoulli**

São Cristóvão - SE

2018

Fernando Guimarães Oliveira Mota

**Análise do efeito da não linearidade física em um elemento de barra de
Euler-Bernoulli**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Sergipe – UFS como requisito
para encerramento do componente curricular e conclusão
da graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa

São Cristóvão - SE

2018

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta monografia e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Assinatura

Fernando Guimarães Oliveira Mota

**Análise do efeito da não linearidade física em um elemento de barra de
Euler-Bernoulli**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade Federal de Sergipe – UFS como requisito
para encerramento do componente curricular e conclusão
da graduação em Engenharia Civil.

Aprovada em: 11 de maio de 2018

Banca Examinadora:

_____ Nota _____
Prof. Dr. Jorge Carvalho Costa – Universidade Federal de Sergipe
(Presidente - Orientador)

_____ Nota _____
Prof. Dr. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim – Universidade Federal de
Sergipe
(Examinador 1)

_____ Nota _____
Prof. Dr. Higor Sergio Dantas de Argolo – Universidade Federal de Sergipe
(Examinador 2)

_____ Nota _____
Eng. João Marcos de Jesus Oliveira – Universidade Federal de Sergipe
(Examinador 3)

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

Aos meus pais, Junior e Simone, por todo o apoio e ensinamentos passados em todos os momentos.

Aos meus irmãos, Diego e Felipe, pelo companheirismo compartilhado sempre.

À família, minha base e fonte de inspiração.

À minha namorada, Samara, por todos os conselhos e paciência no dia a dia.

Ao meu orientador Jorge Costa, pela grande ajuda, tanto para elaboração dessa pesquisa, quanto no entendimento de questões paralelas.

A todos os professores da UFS, em especial aos da área de estruturas, que me fizeram ter tamanho interesse pela mesma.

Aos meus amigos, que ajudaram incondicionalmente, tanto a focar quanto a tirar o foco, quase sempre nos momentos certos.

RESUMO

A presente pesquisa visa a criação de um algoritmo que faça a resolução de estruturas em formato de vigas constituídas por um material genérico elástico não-linear. O método numérico utilizado para criação das barras foi a análise matricial, com 3 graus de liberdade em cada nó, porém só os graus de liberdade que sofrem influência da flexão sofrem da não linearidade física do material. Foi adotada a cinemática de barra de Euler-Bernoulli, que não considera a deformação da seção transversal devido a tensão cisalhante, contudo, usualmente tem resultados satisfatórios. A formulação que considera a não linearidade física é constituída por um sistema de equações não lineares, normalmente sem solução analítica, por essa razão foi escolhido um método de cálculo numérico, sendo selecionado o método de Newton-Raphson. Para tornar o método de cálculo numérico ainda mais rápido, foi utilizado a técnica de incremento de cargas constante.

Palavras-chaves: Não linearidade física; Não linearidade material; Análise matricial de estruturas.

ABSTRACT

The present research looks for the development of an algorithm that makes the resolution of beam structures made by a generic elastic nonlinear material. The numeric method used for the creation of the beams was the matrix analysis of structures, with three degrees of freedom in each joint, however only the degrees of freedom that suffer influence of bending are subjected to physical nonlinearity. The theory used for formulation of the displacement of the beams is the Euler-Bernoulli Beam Theory, in which the shear stress on the cross-sectional area does not affect the displacements, however this kinematic model yields good results. The system that the physical nonlinearity generates is made of several nonlinear equations, rarely solvable by analytical procedures, thus requiring the use of numerical calculus techniques, more specifically, the Newton-Raphson method. To make the method of numerical analysis more efficient, it was used the technique of constant incremental loads.

Keywords: Physical nonlinearity; Material nonlinearity; Matrix analysis of structures.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diagrama Tensão x deformação : (a) linear ; (b) não linear	5
Figura 2 - momento x curvatura	6
Figura 3 - Barra submetida a flexão pura	7
Figura 4 - Tensão e deformação no regime elástico	8
Figura 5 - Tensão x deformação (material elasto-plástico perfeito).....	9
Figura 6 - Tensão e deformação para mesa plastificada.....	10
Figura 7 - Tensão e deformação para alma plastificada	11
Figura 8 – Diagrama momento x curvatura (Método analítico).....	13
Figura 9 – Diagrama momento x curvatura (Método sem camadas)	14
Figura 10 - Seção discretizada em lamelas.....	15
Figura 11– Diagrama momento x curvatura (Método de lamelas).....	16
Figura 12 - Não Linearidade Geométrica	16
Figura 13 - Discretização de sólidos contínuos	18
Figura 14 - Elemento de barra com 4 graus de liberdade.....	18
Figura 15 - Método de Newton-Raphson	23
Figura 16 – Equilíbrio do nó	24
Figura 17 – Fluxograma do programa	27
Figura 18 – Exemplo 1	32
Figura 19 – Momento x curvatura (exemplo 1).....	33
Figura 20 – Rigidez transversal x momento (exemplo 1)	33
Figura 21 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 1)	34
Figura 22 – Estrutura deformada (exemplo 1).....	35
Figura 23 – Diagrama de momento fletor (exemplo 1).....	36
Figura 24 – Configuração da estrutura (Exemplo 1)	37
Figura 25 – Exemplo 2	38
Figura 26 - Configuração da estrutura (exemplo 2)	38
Figura 27 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 2)	39
Figura 28 – Estrutura deformada (exemplo 2).....	39
Figura 29 – Diagrama de momento fletor (exemplo 2).....	40
Figura 30 – Exemplo 3	41
Figura 31 – Momento x curvatura (exemplo 3).....	41
Figura 32 – Rigidez transversal x Momento (Exemplo 3)	42
Figura 33 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 3)	43
Figura 34 – Estrutura deformada (exemplo 3).....	44
Figura 35 – Diagrama de momento fletor (exemplo 3).....	45
Figura 36 – Configuração da estrutura (exemplo 3).....	46
Figura 37 – Exemplo 4	46
Figura 38 – Configuração da estrutura (exemplo 4).....	47
Figura 39 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 4)	47
Figura 40 - Estrutura deformada (exemplo 4)	48
Figura 41 - Diagrama de momento fletor (exemplo 4).....	49
Figura 42 – Exemplo 5	50
Figura 43 – Momento x curvatura (exemplo 5).....	51
Figura 44 – Rigidez transversal x momento (exemplo 5)	52
Figura 45 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 5)	53

Figura 46 – Estrutura deformada (exemplo 5).....	54
Figura 47 – Diagrama de momento fletor (exemplo 5).....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo 1	36
Tabela 2 – Exemplo 2	40
Tabela 3 – Exemplo 3	45
Tabela 4 – Exemplo 4	49
Tabela 5 – Exemplo 5	52

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
2	Objetivo.....	3
3	Revisão bibliográfica.....	4
3.1	Teoria de análise de vigas.....	4
3.1.1	Introdução	4
3.1.2	Viga de Euler-Bernoulli	4
3.2	Não Linearidade Física	5
3.2.1	Método analítico	6
3.2.2	Método sem camadas	13
3.2.3	Método de Lamelas	15
3.3	Não linearidade geométrica	16
3.4	Análise matricial de estruturas.....	17
3.4.1	Introdução	17
3.4.2	Matriz de rigidez global para modelo de Euler-Bernoulli	18
3.4.3	Funções de forma para modelo de Euler-Bernoulli	20
3.5	Sistema de equações não lineares	21
3.5.1	Introdução	21
3.5.2	Método de Newton – Raphson.....	22
3.6	Equilíbrio de estruturas em não linearidade material	23
4	Metodologia	27
4.1	Pré-Processamento.....	28
4.2	Processamento	29
4.3	Pós-processamento.....	30
5	Resultados e discussões.....	32
5.1	Exemplo 1	32
5.2	Exemplo 2	37
5.3	Exemplo 3	40
5.4	Exemplo 4.....	46
5.5	Exemplo 5	50
6	Conclusão.....	55

1 INTRODUÇÃO

Segundo Kassimali (2010), a análise estrutural, que é parte integrante de qualquer projeto estrutural da engenharia, é o processo de prever a performance de uma dada estrutura sob a influência de uma condição de carregamento imposta. O comportamento da estrutura depende de muitas variáveis, como as características dos materiais que a compõem e as características geométricas da mesma, ou condições de contorno.

Alguns dos componentes básicos de uma superestrutura convencional são as lajes, as vigas e os pilares. As lajes são estruturas em que duas dimensões são muito maiores que a terceira e que o carregamento é aplicado perpendicularmente ao plano das duas maiores dimensões. As vigas são estruturas que uma dimensão é muito maior que as outras e trabalham majoritariamente sob esforço cortante e momento fletor nos planos perpendiculares à maior dimensão. Os pilares têm a mesma característica geométrica que as vigas, porém aqueles trabalham sob influência majoritária da compressão e do momento fletor vindo destas (KASSIMALI, 2010).

O comportamento de uma viga sob carregamento usual é descrito de diversas formas, desde modelos simples, como o desenvolvido por Euler e Bernoulli, passando por modelos que incorporam deformações advindas do cisalhamento como as barras de Timoshenko, até teorias mais robustas, como as que incorporam deformações de ordem superior. O modelo desenvolvido por Euler e Bernoulli é o mais comum, pois necessita de poucos parâmetros de entrada, não requer um grande poder de processamento para resolução e gera bons resultados (HAN *et al.* 1999).

O material constituinte da estrutura é de fundamental importância no cálculo dos esforços, visto que seu comportamento pode gerar uma redistribuição dos esforços internos ou alterações nas deformações sofridas pela estrutura. Como exemplo, o concreto armado não é um material elástico perfeito, pois o efeito da fissuração, escoamento da armadura e fluência fazem com que a deformação da peça não seja proporcional ao aumento de tensão. Segundo MacGregor (2012), esses efeitos estão dentro da não linearidade física (NLF) do material.

Apesar de a minoração da rigidez do material ser uma maneira simples de contabilizar os efeitos citados do material, o resultado final pode não ser preciso (NBR6118:2014). Para efetuar mais precisamente o cálculo da NLF deve ser gerado um sistema de equações não lineares, que podem ser resolvidos por métodos de cálculo numérico. Esses métodos requerem um alto poder de processamento, mas garantem uma maior precisão nos resultados.

2 OBJETIVO

A presente pesquisa visa aplicar a não linearidade física decorrente da plastificação do material para o modelo de viga desenvolvido por Euler e Bernoulli.

Para tal, pode-se delinear alguns objetivos intermediários:

- Analisar a relação momento-curvatura de uma seção transversal composta de material não-linear;
- Estudar o elemento de barra utilizando a teoria de Euler-Bernoulli considerando o material elástico não linear;
- Implementar um algoritmo de solução de sistemas não lineares;
- Comparar o resultado da análise linear com a análise não linear física;

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 TEORIA DE ANÁLISE DE VIGAS

3.1.1 Introdução

Em 1876, Pochhammer foi o precursor da investigação de uma formulação exata da elasticidade geral para vigas. Em conjunto com Chree (1889) foram derivadas as equações que descrevem a vibração de um sólido cilíndrico. Para o uso da engenharia, a formulação proposta por Pochhammer e Chree não é prática, já que requer a obtenção de muitos parâmetros de entrada.

O modelo cinemático de Euler-Bernoulli faz algumas simplificações, sendo a principal influência dessas a não quantificação da deformação devido à tensão cisalhante. Para a utilização da formulação proveniente dessa teoria são necessários poucos parâmetros de entrada e usualmente é gerado um resultado próximo do real, especialmente para vigas de pequena seção transversal.

Timoshenko foi o primeiro a considerar o efeito da tensão cisalhante, através da rotação da seção em relação ao eixo da viga. Para vigas espessas e com pequeno comprimento, o modelo de Euler-Bernoulli não gera bons resultados, isso ocorre devido ao aumento da influência do esforço cortante frente ao momento fletor, porém o modelo de Timoshenko diminui esse erro. Em contrapartida, a teoria da viga de Timoshenko requer mais parâmetros de entrada para o cálculo das tensões e deformações e tem implementação computacional mais difícil.

3.1.2 Viga de Euler-Bernoulli

A teoria da análise da viga proposta por Euler-Bernoulli é também conhecida como teoria clássica (BEER *et al.*, 2011). As hipóteses assumidas para formulação foram:

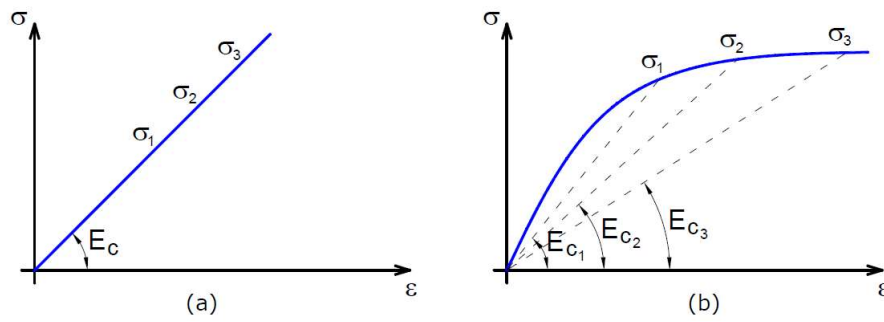
- Seção transversal permanece plana após o deslocamento.
- Seção transversal permanece indeformada.
- Seção transversal permanece ortogonal ao eixo longitudinal da viga.
- Uma das dimensões do corpo é muito maior que as outras.
- O efeito de Poisson é desprezado.

Essas considerações fazem com que a viga definida não contabilize o efeito do esforço cisalhante na deformação do corpo. O resultado da análise do modelo de Euler-Bernoulli se aproxima do real à medida que a esbeltez da viga aumenta.

3.2 NÃO LINEARIDADE FÍSICA

Segundo Pinto (1997), a não linearidade física do material faz com que ocorra uma diminuição de seu módulo de elasticidade, decorrente da perda da integridade da seção ou do material. A Figura 1 é a exemplificação do diagrama tensão x deformação unidirecional para a aproximação linear e para o estado não linear.

Figura 1 - Diagrama Tensão x deformação : (a) linear ; (b) não linear



Fonte: Pinto (1997)

No caso da Figura 1(a), a deformação é proporcional a tensão, e o módulo de elasticidade é constante. O material é dito elástico linear e obedece à Lei de Hooke

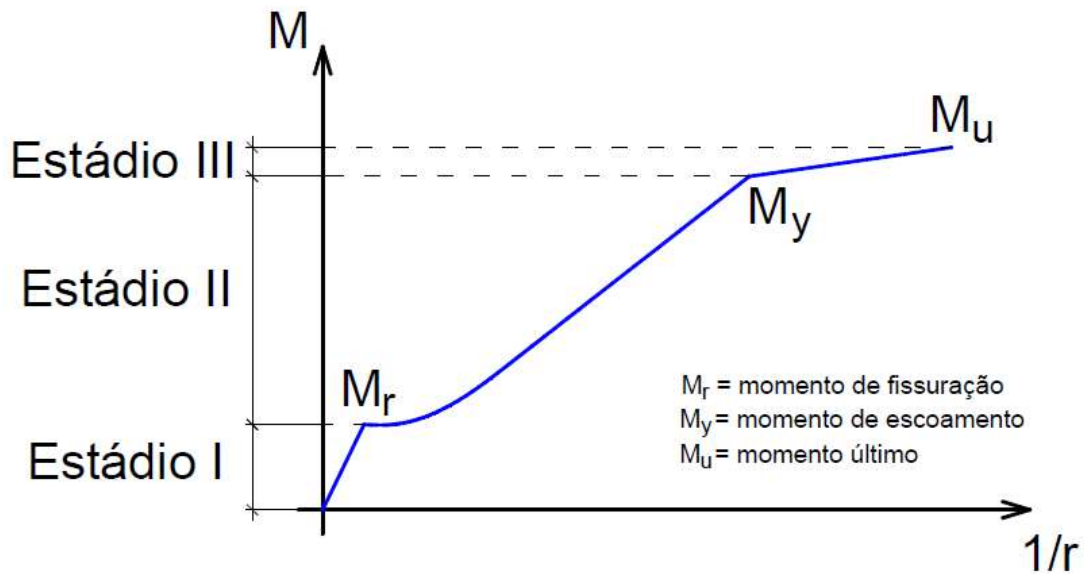
$$\sigma = E_c \varepsilon \quad (1)$$

com módulo de deformação longitudinal E_c constante, independente da tensão atuante. No caso da Figura 1(b) o diagrama é não linear, e o módulo de elasticidade diminui à medida que a carga aumenta. É importante diferenciar o módulo de elasticidade secante ($E_c = \sigma/\varepsilon$), mostrado na figura, e o módulo de elasticidade tangente

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \quad (2)$$

Essa característica não linear, presente no concreto, aço e outros materiais, influencia também na relação de momento x curvatura da seção transversal, onde sua tangente é comumente nomeada de rigidez da viga (PINTO, 1997).

Figura 2 - momento x curvatura



Fonte: Pinto (1997)

A Figura 2 exemplifica o comportamento de uma viga de concreto armado com seção transversal típica. No estágio I, anterior à fissuração ou ao esmagamento do concreto, o diagrama é linear, e ele abrange a origem do gráfico até o momento de fissuração. O estágio II inicia quando o concreto começa a fissurar e ocorre a fragilização da seção transversal. Por fim, o estágio III se inicia quando o aço presente na região sob tração escoar.

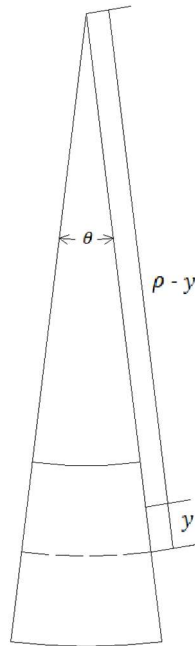
A elasto-plasticidade perfeita é o comportamento idealizado dos materiais que respondem linearmente à tensão axial e após o escoamento deformam-se sem acréscimo de forças.

Para o cálculo do comportamento não linear físico em uma estrutura podem ser utilizados métodos analíticos ou métodos numéricos. Segundo Owen (1980), os dois métodos numéricos mais usuais para o cálculo desse efeito são o método sem camadas e o método de lamelas.

3.2.1 Método analítico

O método analítico é o cálculo sem aproximações a partir de uma função desenvolvida utilizando os conceitos de deformação e tensão. Para o modelo de viga desenvolvido por Euler e Bernoulli, com as considerações já citadas para a mesma, uma barra submetida à flexão pura se deforma segundo um arco de circunferência (BEER *et al.*, 2011).

Figura 3 - Barra submetida a flexão pura



Fonte: Autoria própria

A Figura 3 apresenta o modelo de barra de Euler-Bernoulli deformada devido uma a flexão pura, onde:

y é a distância da fibra analisada para linha neutra;

θ é o ângulo de curvatura da barra;

ρ é o raio de curvatura da barra.

Considerando-se a geometria do problema, pode-se obter a deformação específica longitudinal de uma fibra da barra ε_x por:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (3)$$

ou

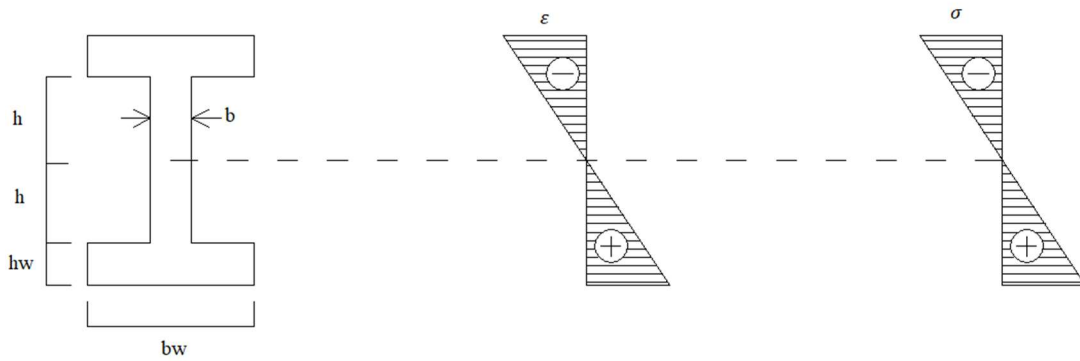
$$\varepsilon_x = -y\kappa \quad (4)$$

tendo ε_x seu valor máximo na fibra mais distante da linha neutra. $\kappa = 1/\rho$ é a curvatura da barra, que é o inverso do seu raio. Ou seja, a deformação específica de um ponto qualquer da barra é diretamente proporcional à curvatura desta, independente do material em questão.

Para o regime elástico, onde a lei de Hooke pode ser aplicada, a deformação é diretamente proporcional à tensão, como mostra a Figura 4.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5)$$

Figura 4 - Tensão e deformação no regime elástico



Fonte: Autoria própria

Desenvolvendo as equações referentes a uma viga em formato I, inicialmente, as tensões seguem o regime linear, como mostrado na Figura 4, ou seja, o material não atinge a tensão de plastificação, que é representada como σ_E . O momento atuante na seção pode ser calculado da seguinte forma:

$$M = \int_{A_1} \sigma y dA_1 + \int_{A_2} \sigma y dA_2 + \int_{A_3} \sigma y dA_3 + \int_{A_4} \sigma y dA_4 \quad (6)$$

Onde A_1 e A_2 são as áreas acima da linha neutra, referentes às áreas da mesa e da alma, respectivamente, A_3 e A_4 seguem o mesmo padrão, mas são localizadas abaixo da linha neutra. Desenvolvendo a integral apresentada, chega-se ao seguinte resultado.

$$M = 2E\kappa(h + hw) \left[\frac{h}{h+hw} bwhw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + \left(1 - \frac{h}{h+hw} \right) \frac{bw}{2} hw \left(h + \frac{2}{3} hw \right) + \frac{h}{h+hw} \frac{bh^2}{3} \right] \quad (7)$$

$$\frac{dM}{d\kappa} = 2E(h + hw) \left[\frac{h}{h+hw} bwhw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + \left(1 - \frac{h}{h+hw} \right) \frac{bw}{2} hw \left(h + \frac{2}{3} hw \right) + \frac{h}{h+hw} \frac{bh^2}{3} \right] \quad (8)$$

Para o regime elástico o módulo de elasticidade é constante, logo o momento varia linearmente em função da curvatura κ . A derivada do momento ($dM/d\kappa$) pela curvatura pode ser entendida como a rigidez da barra e está expressa como a tangente do gráfico representado na Figura 2.

Essas equações são válidas somente para o regime elástico, ou seja, quando o módulo da tensão máxima em uma seção transversal for menor que a tensão de escoamento do material

$$-\sigma_E \leq E \kappa (h + hw) \leq \sigma_E \quad (9)$$

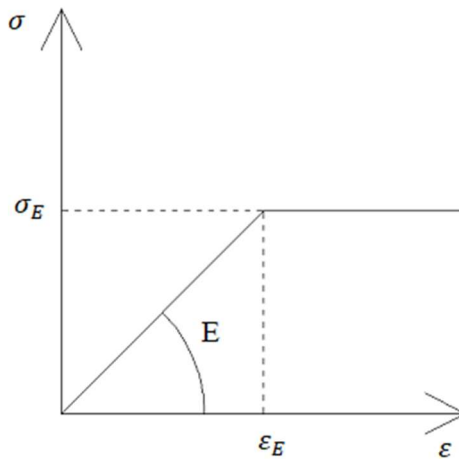
ou seja, quando a curvatura está contida no seguinte intervalo:

$$-\frac{\sigma_E}{E(h+hw)} \leq \kappa \leq \frac{\sigma_E}{E(h+hw)} \quad (10)$$

Quando a curvatura atinge valores fora desse limite, a seção entra no regime plástico, trabalhando parcialmente ou totalmente plastificada. Nesse regime a deformação depende do tipo de comportamento plástico do material.

Para o caso da elasto-plasticidade perfeita, o diagrama de tensão x deformação do material tem a seguinte configuração:

Figura 5 - Tensão x deformação (material elasto-plástico perfeito)

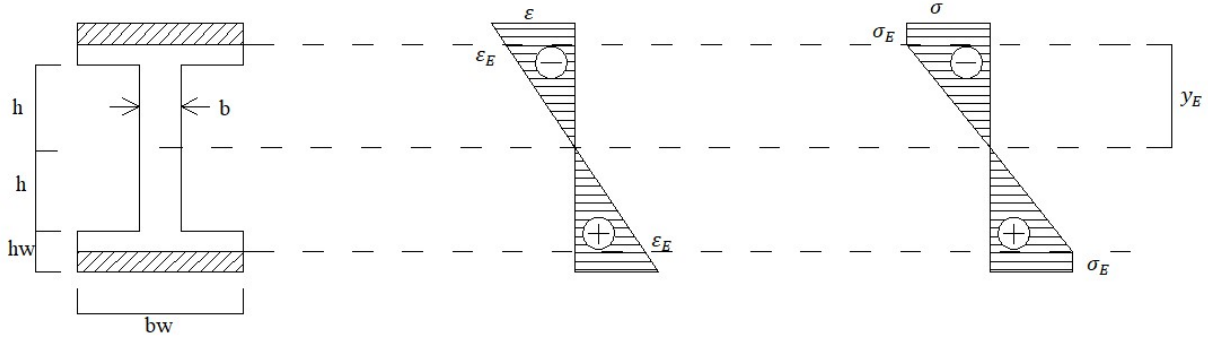


Fonte: Autoria própria

Como mostrado na Figura 5, ε_E é a deformação correspondente ao instante em que a tensão plastificante é atingida. Para uma seção que está trabalhando no regime plástico, o momento atuante é igual ao momento resistente, assim o momento pode ser calculado de maneira quase que análoga ao cálculo para uma seção no regime elástico.

Para uma seção genérica I, a plastificação pode ser definida em dois estágios. No primeiro instante somente a mesa plastifica e, com o aumento do momento atuante, posteriormente a alma atinge o regime plástico.

Figura 6 - Tensão e deformação para mesa plastificada



Fonte: Autoria própria

Tomando como base a Figura 6, o momento resistente é igual a:

$$M = \int_{A_1} \sigma y dA_1 + \int_{A_2} \sigma y dA_2 + \int_{A_3} \sigma y dA_3 + \int_{A_4} \sigma y dA_4 + \int_{A_5} \sigma y dA_5 + \int_{A_6} \sigma y dA_6 \quad (11)$$

Onde A_1 é a área plastificada acima da linha neutra, A_2 é a área da mesa que obedece a lei de Hooke acima da linha neutra e A_3 é a área da alma acima da linha neutra. A_4 , A_5 e A_6 seguem a mesma lógica das áreas A_1 , A_2 e A_3 respectivamente, porem estão situadas abaixo da linha neutra. Considerando que a única variável que influencia no momento é a distância da linha neutra até a primeira fibra plastificada é possível desenvolver a Eq. (11), chegando no seguinte resultado:

$$M = 2\sigma_E \left[(h + hw - y_E)bw \frac{h + hw + y_E}{2} + \frac{h}{y_E} (y_E - h)bw \frac{y_E + h}{2} \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{h}{y_E} \right) \frac{y_E - h}{2} bw \left(\frac{2}{3} y_E + \frac{h}{3} \right) + \frac{h}{y_E} \frac{bh^2}{3} \right] \quad (12)$$

$$\frac{dM}{d\kappa} = \frac{bw\sigma_E^2 \left(h + hw + \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right)}{E\kappa^2} - \frac{bw\sigma_E^2 \left(h + hw - \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right)}{E\kappa^2} + \frac{bwh\sigma_E \left(h - \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right)}{\kappa} \\ - \frac{bwh\sigma_E \left(h + \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right)}{\kappa} - Ebwh \left(h + \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right) \left(h - \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right) \\ + Ebwh \left(h - \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right) \left(\frac{h}{3} + \frac{2\sigma_E}{3E\kappa} \right) \left(\frac{Eh\kappa}{\sigma_E} - 1 \right) \\ Ebwh \left(h + \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right) \left(h - \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right) \quad (13)$$

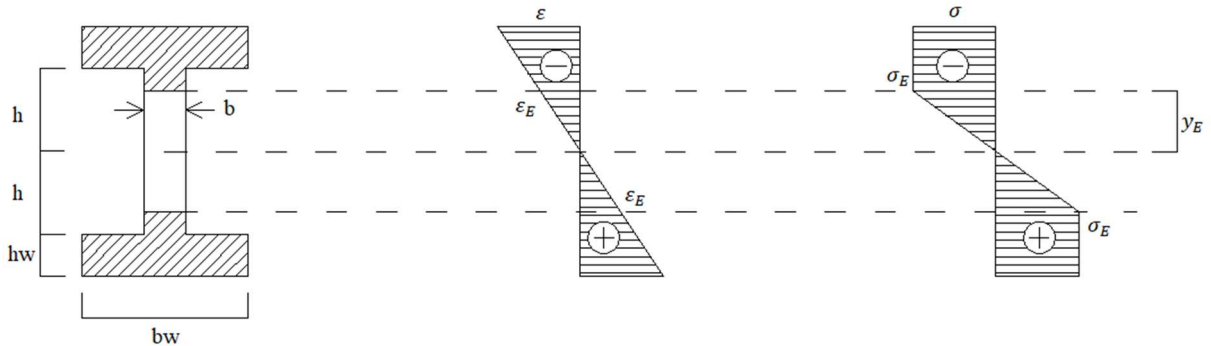
O intervalo de validade dessas funções são os seguintes:

$$-\frac{\sigma_E}{Eh} \leq \kappa \leq -\frac{\sigma_E}{E(h+hw)} \text{ ou} \quad (14)$$

$$\frac{\sigma_E}{E(h+hw)} \leq \kappa \leq \frac{\sigma_E}{Eh} \quad (15)$$

Quando a curvatura não se encontra nesse intervalo ou no intervalo do regime elástico, a seção trabalha com a alma plastificada.

Figura 7 - Tensão e deformação para alma plastificada



Fonte: Autoria própria

Para o cálculo do momento atuante na seção é necessário a resolução da integral:

$$M = \int_{A_1} \sigma y dA_1 + \int_{A_2} \sigma y dA_2 + \int_{A_3} \sigma y dA_3 + \int_{A_4} \sigma y dA_4 + \int_{A_5} \sigma y dA_5 + \int_{A_6} \sigma y dA_6 \quad (16)$$

Onde as áreas A_1 , A_2 e A_3 correspondem à mesa acima da linha neutra, à alma plastificada acima da linha neutra e à alma que obedece a lei de Hooke acima da linha neutra. As áreas A_4 , A_5 e A_6 seguem a mesma lógica das áreas A_1 , A_2 e A_3 respectivamente, porem estão situadas abaixo da linha neutra. Desenvolvendo as integrais e considerando a distância da linha neutra para a fibra plastificada mais próxima como a única variável, obtém-se a seguinte equação:

$$M = 2\sigma_E \left[bwhw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + (h - y_E)b \frac{h+y_E}{2} + \frac{y_E^2 b}{3} \right] \quad (17)$$

$$\frac{dM}{d\kappa} = \frac{b\sigma_E^2 \left(h + \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right)}{E\kappa^2} - \frac{b\sigma_E^2 \left(h - \frac{\sigma_E}{E\kappa} \right)}{E\kappa^2} - \frac{4b\sigma_E^3}{3E^2\kappa^3} \quad (18)$$

Essas funções são válidas dentro de um dos seguintes intervalos:

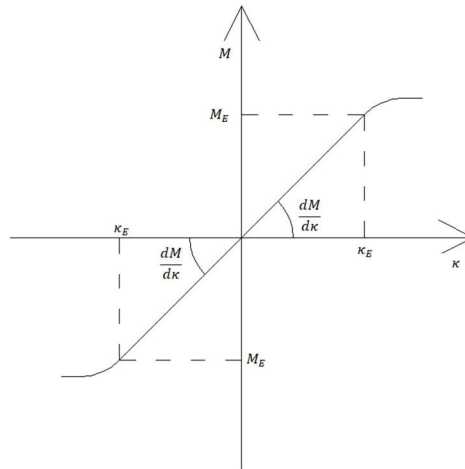
$$-\infty \leq \kappa \leq -\frac{\sigma_E}{Eh} \text{ ou} \quad (19)$$

$$\frac{\sigma_E}{Eh} \leq \kappa \leq \infty \quad (20)$$

Como a única variável das funções é a curvatura κ , é possível observar que o limite do momento tende a assíntotas horizontais com valor de $M = \pm 2\sigma_E \left[bw hw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + \frac{bh^2}{2} \right]$ quando κ tende ao infinito positivo ou negativo, e que o limite da derivada do momento pela curvatura tende a 0 em ambos os casos.

O diagrama de momento curvatura que representa um material elasto-plástico perfeito sujeito a flexão simples é:

Figura 8 – Diagrama momento x curvatura (Método analítico)



Fonte: Autoria própria

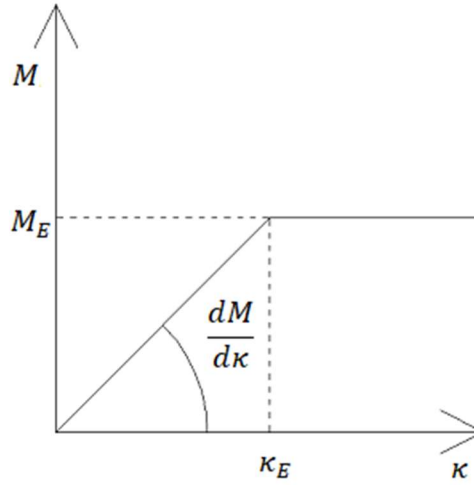
A Figura 8 representa a configuração padrão do diagrama momento x curvatura. O formato da transição entre o regime linear até a plastificação total da seção depende da geometria da seção. Para seções com grande concentração de massa longe da linha neutra, a transição até a assíntota horizontal se torna menor relativamente.

3.2.2 Método sem camadas

Segundo Owen (1980), o método sem camadas envolve a consideração física que, no instante em que o momento fletor atuante em uma seção transversal qualquer atinge o momento de plastificação da mesma, toda a seção plastifica ao mesmo tempo.

Esse método é uma simplificação do anterior, já que considera para o regime linear as mesmas relações mas assume que o início da plastificação da seção transversal (em suas fibras mais afastadas do centroide) implica na formação de rótula plástica, ou seja, na perda total de rigidez desta seção.

Figura 9 – Diagrama momento x curvatura (Método sem camadas)



Fonte: Autoria própria

A principal vantagem desse método é que ele requer um menor poder de processamento em comparação ao método analítico. As expressões obtidas para o momento e para a rigidez da seção se resumem a

$$M = 2E\kappa(h + hw) \left[\frac{h}{h + hw} bw hw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + \left(1 - \frac{h}{h + hw} \right) \frac{bw hw}{2} \left(h + \frac{2}{3} hw \right) + \frac{h}{h + hw} \frac{bh^2}{3} \right] \quad (21)$$

$$\frac{dM}{d\kappa} = 2E(h + hw) \left[\frac{h}{h + hw} bw hw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + \left(1 - \frac{h}{h + hw} \right) \frac{bw hw}{2} \left(h + \frac{2}{3} hw \right) + \frac{h}{h + hw} \frac{bh^2}{3} \right] \quad (22)$$

para o regime elástico e

$$M = 2E\kappa(h + hw) \left[\frac{h}{h + hw} bw hw \left(h + \frac{hw}{2} \right) + \left(1 - \frac{h}{h + hw} \right) \frac{bw hw}{2} \left(h + \frac{2}{3} hw \right) + \frac{h}{h + hw} \frac{bh^2}{3} \right] \quad (23)$$

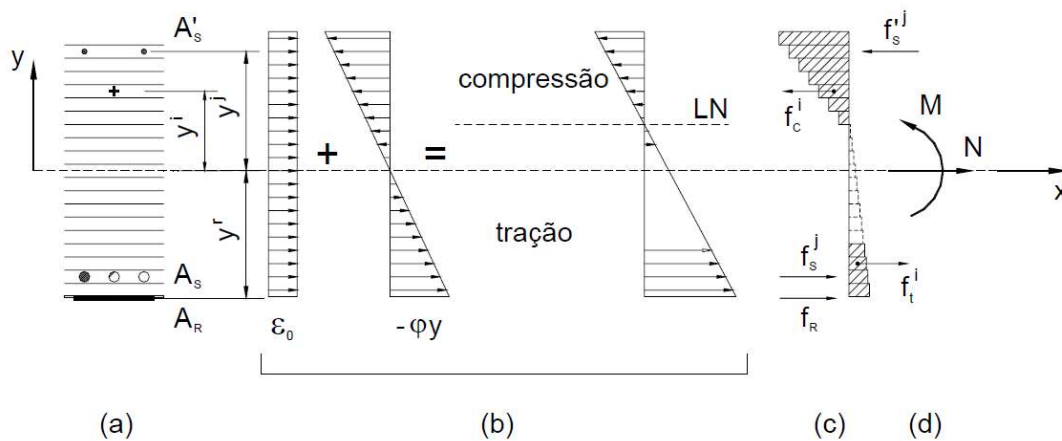
$$\frac{dM}{d\kappa} = 0 \quad (24)$$

para o plástico, com κ_E sendo a curvatura para a qual a primeira fibra plastifica.

3.2.3 Método de Lamelas

Segundo Owen (1980), o método de Lamelas, ou de camadas, faz a estratificação da seção transversal em subcamadas, em que uma subcamada pode atingir um estado de tensão e deformação independentemente das outras. Assim, a plastificação da seção transversal simula a plastificação sugerida no método analítico, que ocorre das fibras mais externas até a linha neutra. A Figura 7 ilustra a metodologia aplicada no método de lamelas.

Figura 10 - Seção discretizada em lamelas



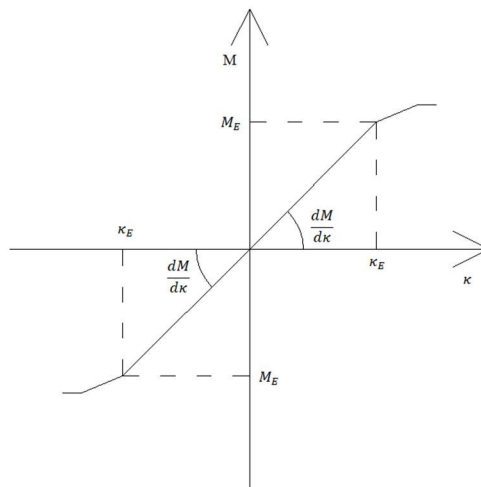
Fonte: Chimello (2003)

A Figura 10(a) representa uma seção transversal qualquer de uma viga de concreto armado discretizada em camadas e a Figura 10(d) representa o esforço normal e o momento fletor que atuam na mesma seção. A deformação dessa seção corresponde à parcela oriunda do esforço normal e do momento fletor, e é representado na Figura 10 (b).

O método de lamelas considera que a tensão e a deformação em uma camada são constantes, tendo seu valor igual ao valor calculado para o meio da camada. A Figura 10 (c) representa as tensões nas camadas propostas.

Esse método constitui uma aproximação numérica da integração do método analítico. Usá-lo significa a substituição de um esforço analítico de cálculo das integrais na seção transversal por um esforço de cálculo e programação numérica. Para uma boa solução pelo método de lamelas, podem ser necessárias várias células de integração, com um consequente maior esforço computacional.

Figura 11– Diagrama momento x curvatura (Método de lamelas)



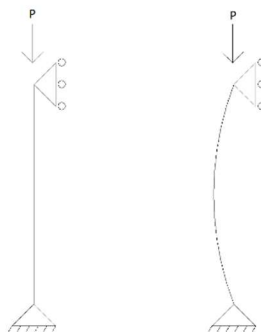
Fonte: Autoria própria

A Figura 11 é um diagrama genérico de momento x curvatura. Quanto mais a seção transversal for subdividida em novas camadas, mais o diagrama desse método se tornará próximo do diagrama do método analítico, similar à Figura 8.

3.3 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A não linearidade geométrica de uma estrutura ocorre devido à influência do deslocamento da mesma, ou seja, a mudança de posição da estrutura no espaço. Esse efeito gera uma nova configuração de estabilidade, gerando nova distribuição de esforços (STRAMANDI-NOLI, 2007).

Figura 12 - Não Linearidade Geométrica



Fonte: Autoria própria

A Figura 12 apresenta o efeito conhecido como flambagem, que é a perda da retificação em estruturas resistindo à compressão. Esse efeito é um tipo de não linearidade geométrica, onde a estrutura inicialmente resistia somente à compressão, mas após o deslocamento ocorre o aparecimento do cisalhamento e do momento fletor (BRANCO, 2002).

3.4 ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

3.4.1 Introdução

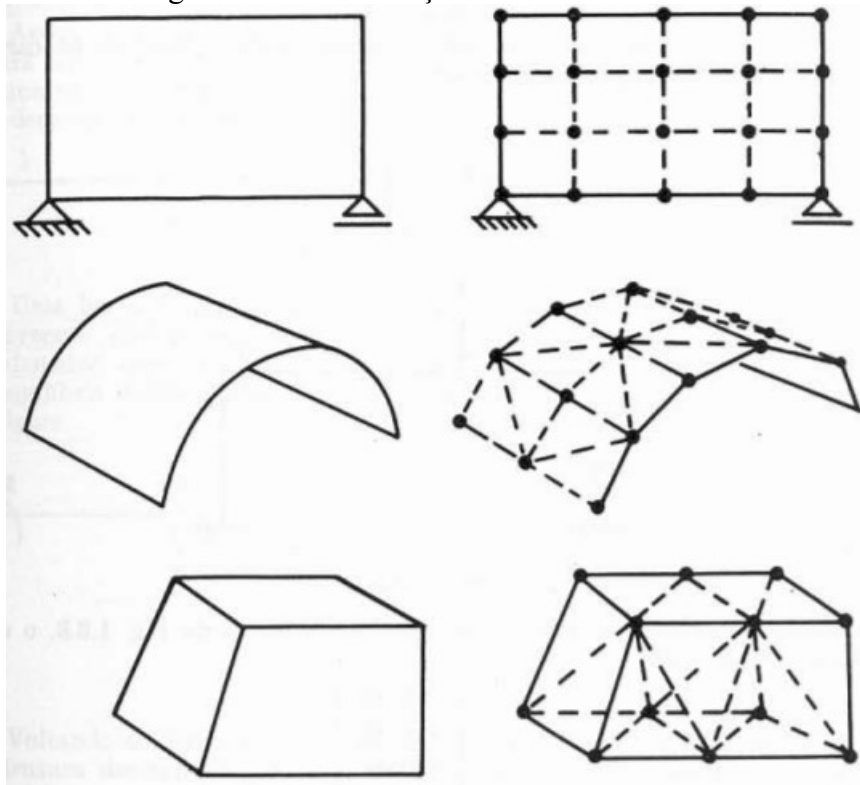
A análise matricial de estruturas surgiu no século XIX e tinha como principal desvantagem o grande número de sistemas de equações. Com o surgimento do computador essa desvantagem foi superada e problemas envolvendo grandes estruturas obtiveram resultados rápidos e confiáveis (KASSIMALI, 2010).

Segundo Moreira (1977), o método de análise clássica interpreta a estrutura sendo compostas por elementos infinitesimais, e o método de análise matricial considera que os elementos constituintes da estrutura agora são finitos.

Para estruturas formadas por barras carregadas apenas em seus nós, a análise matricial dá resultado com a mesma exatidão que a análise clássica, pois os nós considerados para modelagem da estrutura são reais (MOREIRA, 1977).

Para estruturas como cascas e blocos, em que não existem nós discretizados, faz-se necessário o emprego de nós fictícios. As ligações entre os nós são feitas em conjuntos fechados de elementos que podem formar modelos triangulares ou quadrilaterais, para estruturas planas, e modelos tetraédricos, para estruturas espaciais. Esse caso é objeto de estudo para o método dos elementos finitos (MOREIRA, 1977).

Figura 13 - Discretização de sólidos contínuos



Fonte: Moreira, 1997

3.4.2 Matriz de rigidez global para modelo de Euler-Bernoulli

O modelo de barra adotado para a formulação é o seguinte:

Figura 14 - Elemento de barra com 4 graus de liberdade



Fonte: Autoria própria

O modelo representado na Figura 14 apresenta deslocamentos no eixo y em 2 pontos (v_1, v_2) e rotações no eixo z em 2 pontos (θ_1, θ_2). Esse modelo é o usual para representar o modelo de viga proposto por Euler e Bernoulli.

Os graus de liberdade de um elemento podem ser agrupados em um vetor

$$d = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (25)$$

O método da rigidez direta pode ser aplicado para relacionar as forças e os deslocamentos nodais da barra. São impostos deslocamentos nodais unitários alternadamente em cada grau de liberdade do elemento e calculadas as forças a serem aplicadas em cada grau de liberdade para obtenção de cada estado de deformações. Seguindo a dedução de Kassimali (2010) para uma barra genérica com módulo de elasticidade, momento de inércia e área constantes ao longo da barra, a matriz de rigidez local do elemento foi dada como:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Foi feita a consideração que os deslocamentos para as estruturas estudadas são de pequena ordem. Dessa maneira os efeitos de segunda ordem geométricas são desprezados.

Para o caso de barras com diferentes orientações no mesmo plano, convém definir um sistema global de coordenadas e expressar os vetores de força e deslocamento nesse sistema. Para uma barra inclinada de θ em relação ao eixo x global, a matriz de transformação é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Assim, a transformação da matriz de rigidez do elemento de coordenadas locais para globais é feita da seguinte maneira:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (28)$$

Onde \mathbf{T}^T é a matriz de transformação transposta e \mathbf{k} a matriz de rigidez global do elemento.

3.4.3 Funções de forma para modelo de Euler-Bernoulli

Para o elemento de viga genérico apresentado na Figura 3 é possível encontrar as equações que comandam as deformações em qualquer ponto da barra em função dos deslocamentos nodais. O deslocamento paralelo ao eixo y em qualquer ponto da barra é função dos deslocamentos nodais θ_1, θ_2, v_1 e v_2 . A equação que comanda esse deslocamento é:

$$v(x) = N_2 v_1 + N_3 \theta_1 + N_5 v_2 + N_6 \theta_2 \quad (29)$$

onde N_2, N_3, N_5 e N_6 são os polinômios

$$N_2 = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad (30)$$

$$N_3 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad (31)$$

$$N_5 = -\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad (32)$$

$$N_6 = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (33)$$

x é a coordenada medida no eixo da barra e L o seu comprimento. Os polinômios representados por N_1 e N_4 são os devido ao deslocamento longitudinal, que não está representado no elemento de viga em estudo. Segundo Stramandinoli (2007), a relação entre a curvatura a o deslocamento vertical nas coordenadas locais é:

$$\kappa(x) = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (34)$$

Como os deslocamentos nodais não dependem de x , somente as funções de forma são derivadas, ficando a equação da seguinte forma:

$$\kappa(x) = N_2'' v_1 + N_3'' \theta_1 + N_5'' v_2 + N_6'' \theta_2 \quad (35)$$

onde,

$$N_2'' = \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \quad (36)$$

$$N_3'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \quad (37)$$

$$N_5'' = -\frac{12}{L^3} + \frac{6}{L^2} \quad (38)$$

$$N_6'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \quad (39)$$

Conforme mencionado, a deformação por cortante é desprezada nas barras de Bernoulli. Assim, podemos definir a curvatura como

$$\kappa(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} v_1 + \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} \theta_1 + \frac{\partial^2 N_5}{\partial x^2} v_2 + \frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \theta_2 \quad (40)$$

Essa deformação generalizada pode ser expressa em forma vetorial por

$$\kappa = \underbrace{\begin{bmatrix} N_2'' & N_3'' & N_5'' & N_6'' \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Foi introduzida a matriz de compatibilidade, \mathbf{B} , que reúne as derivadas das funções de forma tal que

$$\kappa = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (42)$$

Para o caso linear, com material hookeano, os esforços internos são lineares com respeito às deformações generalizadas. Para o momento fletor

$$M = EI\kappa \quad (43)$$

Como a viga desenvolvida aceita somente esforços nos nós, o esforço cortante é constante e seu valor é igual à diferença entre os momentos nos nós dividido pelo comprimento da barra.

3.5 SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

3.5.1 Introdução

Sistemas de equações não lineares são, por definição, um conjunto de equações em que uma ou mais equações tenham os termos variáveis elevados a qualquer coeficiente diferente de 1, ou multiplicados por outra variável. A solução para esse tipo de sistema varia de zero a infinitas soluções.

Para resolver um sistema de equações não lineares existem métodos iterativos, nos quais são arbitrados um valor como solução para o sistema, e a partir da primeira tentativa é feito um refinamento nas tentativas seguintes até atingir um percentual de erro admissível.

Um sistema de equações não lineares pode ser expresso em forma indicial por

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

ou em forma vetorial por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (44)$$

onde \mathbf{f} é um vetor que reúne as equações não lineares e \mathbf{x} é o vetor que reúne as variáveis do problema.

3.5.2 Método de Newton – Raphson

Segundo Owen (1980), o método de Newton – Raphson é um método iterativo que parte de uma aproximação inicial \mathbf{x}_o e busca soluções melhores \mathbf{x}_k que tendam a zerar o resíduo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0}, \quad (45)$$

onde \mathbf{r} é o vetor resíduo, posteriormente identificado como forças residuais ou desbalanceadas. O processo iterativo é desenvolvido a partir da aproximação de primeira ordem

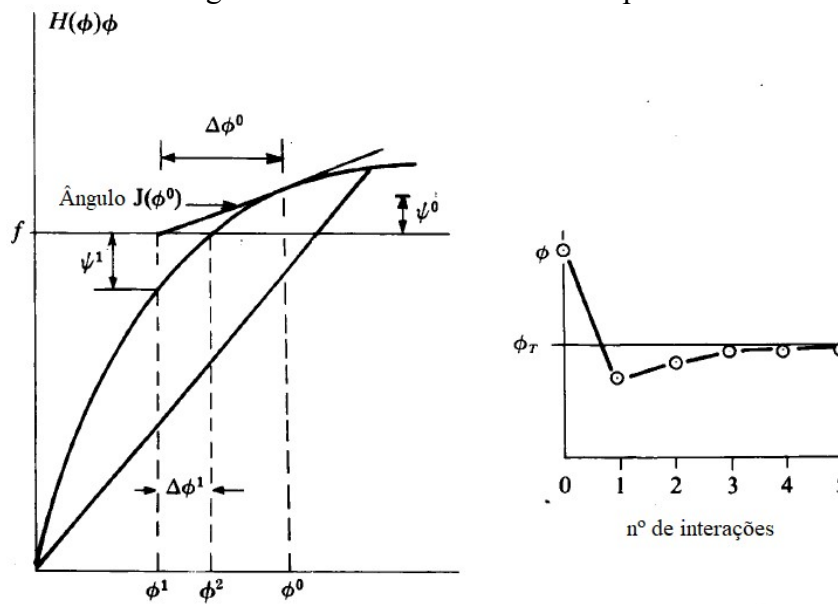
$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{a}} (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad (46)$$

tomando-se \mathbf{a} como uma tentativa de solução do sistema, a tentativa consecutiva será a solução para o sistema linearizado $\mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{k-1}} (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{k-1} \Delta \mathbf{x} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k-1} + \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (47)$$

\mathbf{K} é a matriz tangente, ou Jacobiana do sistema de equações. Deve ser calculada em cada iteração k , assim como o vetor residual \mathbf{f} , o que torna a resolução por este método computacionalmente cara. Todavia, o método tem convergência quadrática para tentativas iniciais próximas da solução exata (RUGGIERO e LOPES, 1996).

Figura 15 - Método de Newton-Raphson



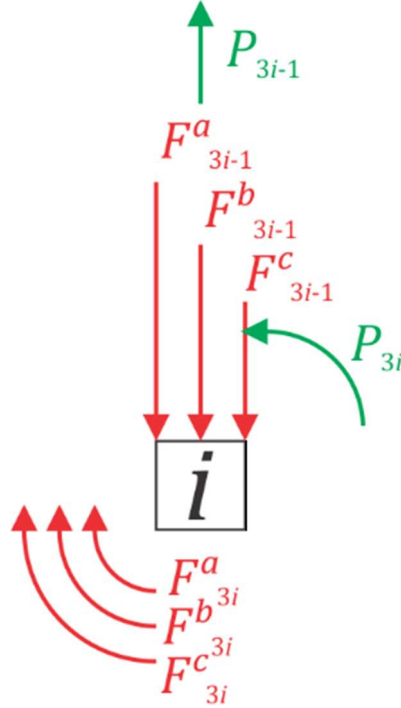
Fonte: Owen (1980)

Como mostrado na Figura 15 o resíduo em cada iteração converge para a raiz da função. O termo assimétrico é a representação da força residual, que é acrescentado no processo seguinte. A iteração é satisfeita quando a força residual que desequilibra o sistema é dada como suficientemente pequena.

3.6 EQUILÍBRIO DE ESTRUTURAS EM NÃO LINEARIDADE MATERIAL

O equilíbrio é imposto à estrutura reticulada a partir do equilíbrio de seus nós. Seja um nó i da estrutura dado na Figura 16, sobre o qual agem os esforços externos (em verde) e forças e momentos vindos das barras (em vermelho), nesse exemplo, três barras a, b, c , mas em regra geral, qualquer número.

Figura 16 – Equilíbrio do nó



Fonte: Autoria própria

O equilíbrio desse nó é garantido se as forças e momento atuantes no mesmo se anulam, ou

$$\sum_{elem} F_{i-1}^e = P_{i-1}$$

$$\sum_{elem} F_i^e = P_i$$

Combinando essas equações para os vários nós da estrutura (num número total de duas vezes o número de nós da estrutura) e expressando-as em forma vetorial, temos

$$\sum_{elem} \mathbf{F}^e = \mathbf{P} \quad (48)$$

onde \mathbf{F}^e reúne as forças que um elemento e faz nos nós da estrutura (zero nos nós onde não se conecta) nas coordenadas globais e \mathbf{P} é o vetor de forças externas. A equação acima pode ser expressa nos mesmos moldes que a Eq.(45), tomando as forças internas \mathbf{F}^e funções dos deslocamentos nodais \mathbf{u}

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \sum_{elem} \mathbf{F}^e(\mathbf{u}) - \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (49)$$

As forças externas \mathbf{P} , por sua vez, não dependem do deslocamento da estrutura. Assim, a matriz tangente do problema será

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{elem} \frac{\partial \mathbf{F}^e(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{elem} \mathbf{K}_e \quad (50)$$

Vê-se que a matriz tangente da estrutura é a soma das matrizes tangente de seus elementos, expandidas para relacionar todos os graus de liberdade da estrutura. A matriz \mathbf{K}_e relaciona a variação das forças exercidas por uma barra e seus deslocamentos nodais, por isso sendo conhecida como matriz de rigidez tangente do elemento.

Utilizando a regra da cadeia, pode-se expressar a matriz tangente do elemento como

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{u}} \quad (51)$$

A parcela $\partial M / \partial \kappa$ corresponde à tangente da relação momento-curvatura da seção transversal na situação atual de carregamento. A multiplicação das outras parcelas corresponde, por analogia, à rigidez geométrica da barra, ou seja, de sua matriz de rigidez original (para o caso elástico linear) dividida menos do momento de inércia da barra I , que deixou de ser uma constante. Assim,

$$\mathbf{K}_e = \frac{\partial M}{\partial \kappa} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Sendo $\partial M / \partial \kappa$ é considerado constante ao longo da barra e tem seu valor estipulado utilizando a integração numérica de 3 pontos da quadratura de Gauss, que garante uma boa aproximação para uma função de até 5º grau. A função que retorna o valor procurado é,

$$J = \sum_{i=1}^n W_i f(P_i) \quad (53)$$

onde,

J é o valor da integral calculado pela quadratura de Gauss

n é o número de pontos de Gauss utilizado

W_i é o peso associado a um determinado ponto de Gauss

P_i é a posição do ponto de Gauss

Utilizando a quadratura com 3 pontos, a posição dos mesmos ao longo da barra são,

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{\sqrt{0,6}}{2} L \\P_2 &= \frac{L}{2} \\P_3 &= \left(\frac{\sqrt{0,6}}{2} + \frac{1}{2} \right) L\end{aligned}$$

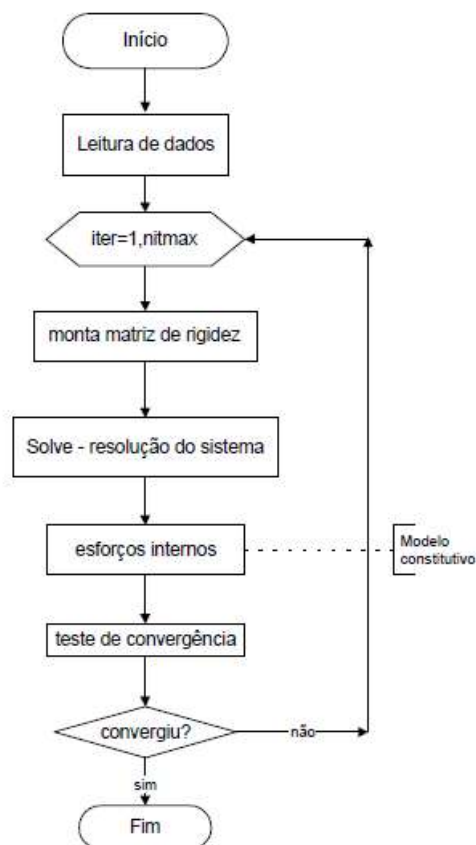
e os pesos que os respectivos pontos serão multiplicados são,

$$\begin{aligned}W_1 &= \frac{5}{18} \\W_2 &= \frac{8}{18} \\W_3 &= \frac{5}{18}\end{aligned}$$

4 METODOLOGIA

O algoritmo criado para a análise de vigas com comportamento físico não linear foi feito utilizando o software MatLab e está estruturado em uma função principal que chama outras funções suportes. Essa subdivisão de funções é feita para deixar o entendimento mais fácil. Os subprogramas podem ser organizados em 3 etapas. Essas etapas são o pré-processamento, o processamento e o pós-processamento. A Figura 17 apresenta o fluxograma resumido do programa.

Figura 17 – Fluxograma do programa



Fonte: Adaptado de Branco, (2002)

O pré-processamento inicia-se a partir de um script com a entrada dos dados de carregamento, materiais e condições de contorno. Essa entrada de dados é feita de maneira que proporcione uma melhor visualização do programador, evitando erros nos parâmetros de entrada.

Ainda na primeira etapa, os dados de entrada passam por outros scripts que são chamados na função principal. Esses scripts têm a função de gerar uma malha para o programa, gerar os contadores que serão utilizados nos loops do processamento, gerar vetores com algumas

características geométricas das barras, fazer a contagem de rótulas e graus de liberdade e organizar o vetor de forças externas de maneira que seja melhor para o algoritmo.

No processamento do algoritmo, a função principal entra em um loop seguindo o método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear. Dentro de cada iteração, será feito o cálculo dos deslocamentos, do resíduo das forças internas e externas e da matriz tangente da estrutura, que serão utilizados na iteração seguinte, até atingir o critério de parada. O método de análise da resistência da seção transversal foi o método analítico, portanto não foi utilizado um método de cálculo com aproximações.

O pós-processamento é essencialmente o tratamento dos dados de saída para gerar um relatório de fácil compreensão para o leitor. Imagens também são geradas no intuito de auxiliar a compreensão do comportamento da estrutura.

4.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

A entrada de dados é o primeiro programa auxiliar chamado pela função principal, ela tem função de receber os dados. No primeiro script chamado pela função principal é inserido o cartão de entrada, nele contém os seguintes dados:

- Coordenadas dos nós
- Módulos de elasticidade
- Tensões de escoamento
- Posição e tipo de restrições
- Posição e direção dos recalques
- Geometria das barras
- Conectividade das barras
- Tipo de ligação entre as barras
- Coordenadas, direção, sentido e intensidade das forças

Ao fim do script de entrada, tem início uma rotina que visa subdividir as barras em partes menores das mesmas. Essa rotina tem função de diminuir o erro na aproximação da rigi-

dez das barras. Com os dados de entrada é iniciada uma rotina com função de gerar os contadores que servem para formar a malha que será entendida pelo algoritmo, fazendo com quem esse funcione para qualquer geometria da estrutura contida em um plano. Os contadores são gerados através da função *size* que está contida na própria biblioteca do MatLab. A terceira função do pré-processamento gera vetores com características geométricas das barras, como comprimento, cosseno, seno, área da seção transversal e número de barras chegando a cada nó.

O número de barras que chega em um nó não é uma característica da barra, mas ele é calculado nessa etapa por conveniência de utilizar um loop com o contador de número de barras. Esse vetor será utilizado no momento do cálculo dos graus de liberdade. Os demais vetores que sairão desse script serão utilizados no processamento da função principal.

Para habilitar a inserção de rótulas na estrutura é necessário utilizar uma rotina que retorne o número de rótulas em cada nó, número de rótulas na estrutura e a contagem dos graus de liberdade da estrutura, considerando que para cada rótula, existe um grau de liberdade a mais. Esse script faz as devidas verificações para que seja considerada a forma correta de rotulação nas barras.

O último script do pré-processamento tem como função reorganizar a matriz de forças fornecida no cartão de entrada. Um vetor é organizado de forma que melhor se adapte ao processamento do algoritmo, alocando as forças externas nas mesmas posições que os graus de liberdade em que elas atuam.

4.2 PROCESSAMENTO

A etapa definida como processamento tem função de calcular os deslocamentos da estrutura.

A essência dessa etapa consiste no cálculo da matriz de rigidez e no vetor de forças internas da estrutura. A matriz de rigidez e o vetor de forças internas do elemento são calculados a partir do vetor de deslocamentos e somados à matriz de rigidez e ao vetor de forças internas, respectivamente.

O vetor de resíduo de forças é gerado através da diferença entre o vetor de forças externas e o vetor de forças internas. Com o vetor de resíduo de forças e a matriz de rigidez da estrutura são calculados os deslocamentos da estrutura para essa configuração.

Para a primeira iteração, os deslocamentos da estrutura são assumidos como nulos, isso é necessário para o cálculo do vetor de forças internas e, posteriormente, o cálculo do vetor de resíduo das forças. Nas iterações seguintes, é usado o deslocamento gerado pela iteração anterior para o cálculo do vetor de forças internas e da matriz de rigidez da estrutura, com isso, é esperado que o resíduo tenda a se aproximar da solução que traga o equilíbrio do sistema, ou seja, que o vetor de resíduo de forças tenda a zero.

Para melhorar a convergência do algoritmo foi feito com que o vetor de forças externas fosse minorado em 50% para a primeira iteração de carga, ou passo de carga, e acrescido em 5% nos passos de carga seguintes. Esse procedimento tem intuito de fazer com que a solução para esse sistema esteja mais próxima da tentativa inicial em cada passo de carga.

Dentro de cada iteração para a resolução do sistema é calculada a diferença relativa entre os resíduos das duas últimas iterações. Quando essa diferença atinge um valor menor que uma constante predefinida a iteração atinge o critério de parada e passa para a próxima o próximo passo de carga pois a convergência foi satisfeita. A constante a ser comparada com a diferença relativa entre as duas últimas iterações é calculada a partir da maior rigidez de uma barra qualquer.

4.3 PÓS-PROCESSAMENTO

A etapa final do algoritmo manipula os resultados da etapa anterior para gerar gráficos e tabelas para auxiliar o entendimento da estrutura. Para gerar o primeiro gráfico, é inicialmente definido pelo programador um ponto da estrutura para se traçar o gráfico de incremento de carga por deslocamento vertical. Esse gráfico evidencia o comportamento não linear da estrutura.

A segunda imagem gerada é a figura da configuração da estrutura, com o desenho dos apoios, forças e momentos pontuais. Essa imagem se faz muito útil para verificar se o sistema está configurado como desejado inicialmente.

A terceira imagem é a sobreposição de 3 configurações da estrutura, que são o traçado da estrutura no estado indeformado, o traçado da estrutura deformada considerando o material elástico linear (a partir da solução da primeira iteração do Newton-Rahpson) e o traçado considerando o material elástico não linear. Essa imagem é feita através da posição inicial dos pontos e dos deslocamentos nodais. Para o traçado dos pontos intermediários das barras tem-se o auxílio das funções de forma.

O diagrama de momento fletor é feito na última imagem, sendo que são sobrepostos os diagramas considerando a estrutura com material elástico não linear e com material hookeano. A função principal dessa imagem é analisar a redistribuição de esforços na estrutura após a plastificação.

Por fim é gerado um relatório de saída com os dados de entrada, como módulo de elasticidade e comprimento de cada barra, posição dos nós, etc. Os resultados do processamento também são escritos no relatório de saída, porem esses resultados são tratados para auxiliar o entendimento. Entre as informações que derivam dos resultados do processamento estão os diagramas de esforço normal, esforço cortante e momento fletor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

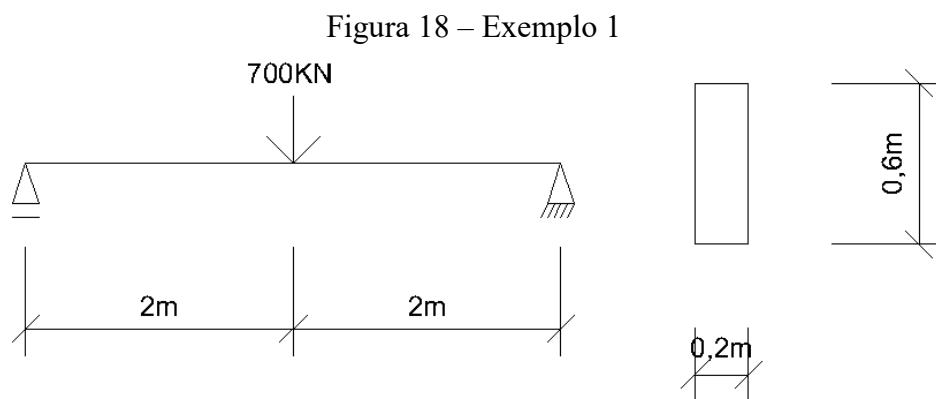
Visando pôr a teste os conceitos apresentados, foram elaborados 5 exemplos, variando desde estruturas simples até estruturas mais elaboradas, como vigas contínuas. Esse leque de opções tem como objetivo proporcionar uma melhor discussão sobre os resultados do algoritmo e comprovar a eficiência do mesmo.

5.1 EXEMPLO 1

Para o primeiro exemplo foi definido uma estrutura isostática bi apoiada, sem balanço e com seção transversal retangular. As configurações do material constituinte são as seguintes:

- Módulo de elasticidade longitudinal: 20 GPa;
- Tensão de escoamento do material: 40 MPa;

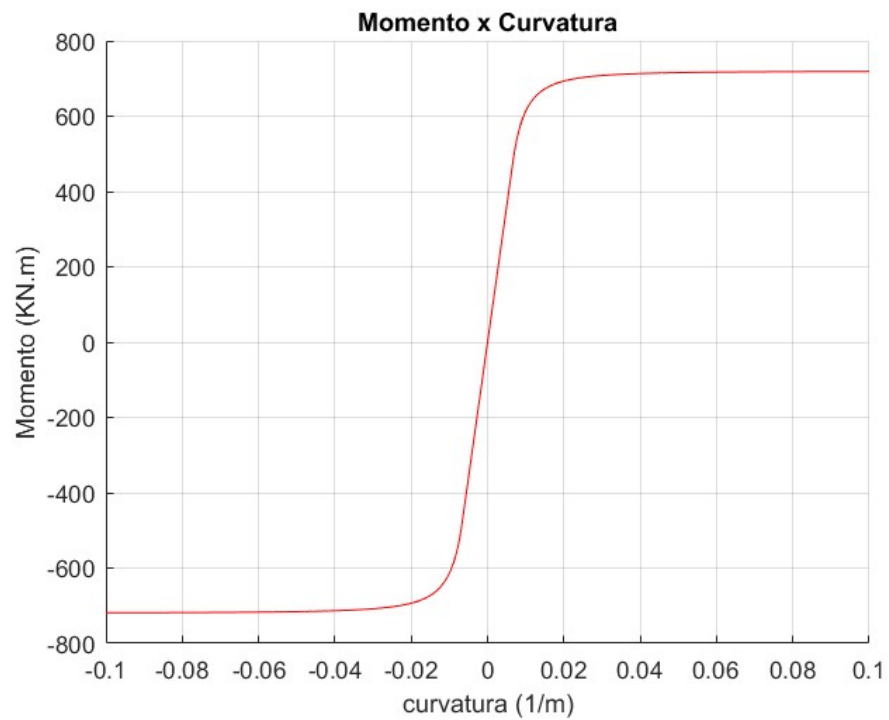
A estrutura está disposta geometricamente da seguinte forma:



Fonte: Autoria própria

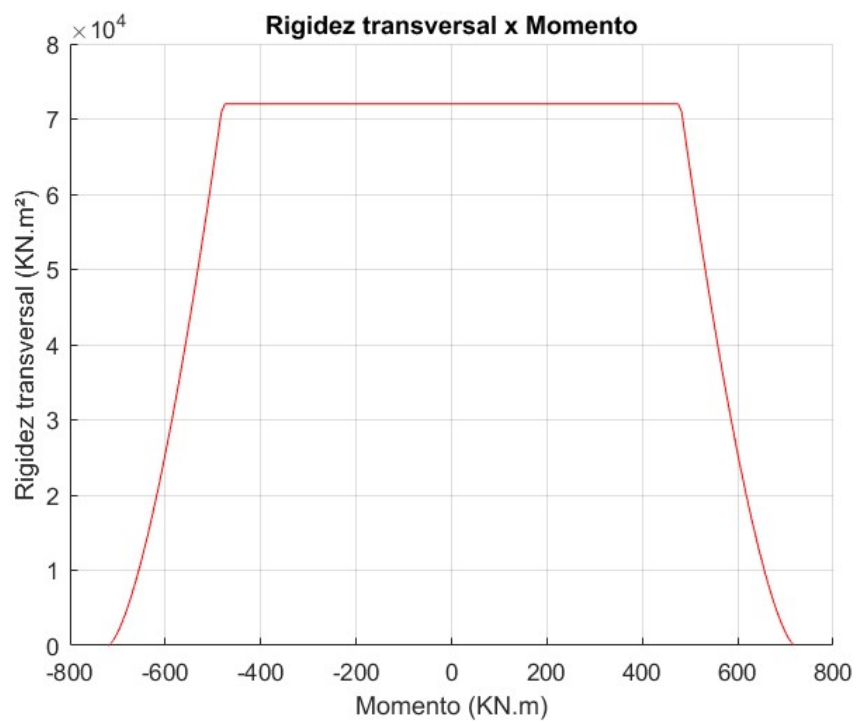
Os diagramas de momento x curvatura e rigidez transversal x momento dependem exclusivamente das características do material e da geometria da seção transversal. Analisando a Figura 18, foi possível traçar os gráficos de momento x curvatura e rigidez transversal x momento apresentados nas Figura 19 e Figura 20, respectivamente.

Figura 19 – Momento x curvatura (exemplo 1)



Fonte: Autoria própria

Figura 20 – Rigidez transversal x momento (exemplo 1)



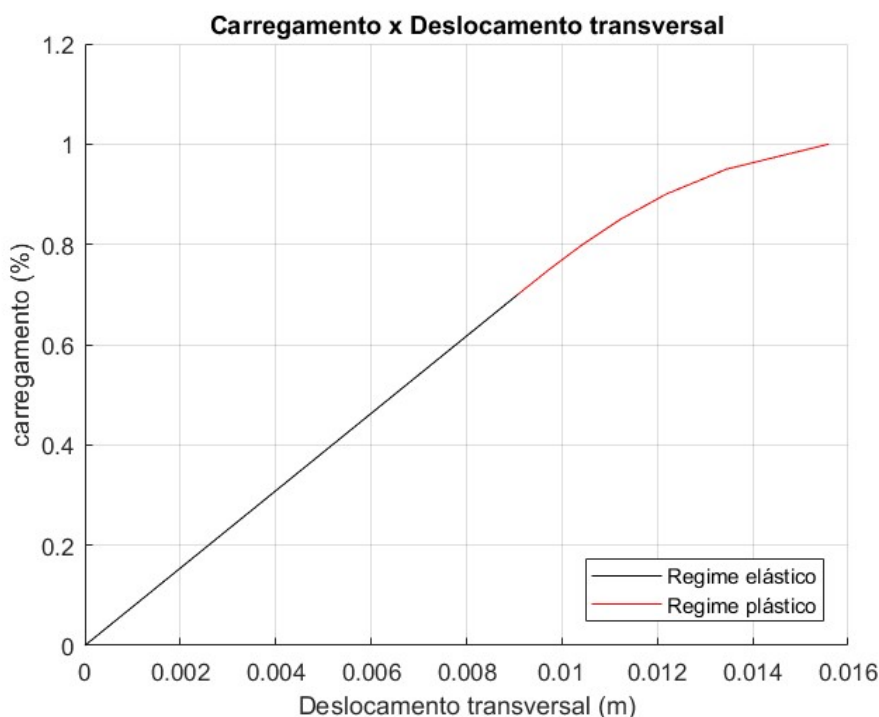
Fonte: Autoria própria

Calculando analiticamente, foi encontrado que o momento fletor que inicia a plastificação da seção equivale a 480 KNm e o momento fletor que causa a formação da rótula plástica equivale a 720 KNm . Com isso, o gráfico de momento x curvatura segue o contorno esperado.

A rigidez transversal inicial é o produto do momento de inércia inicial pelo o módulo de elasticidade inicial, tendo seu valor definido como 72 MN.m^2 . Levando em consideração o momento de início da plastificação e o momento de formação da rótula plástica é possível atestar que o gráfico de rigidez transversal x momento está dentro do esperado.

Fazendo uso do algoritmo desenvolvido foram obtidos os seguintes gráficos.

Figura 21 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 1)

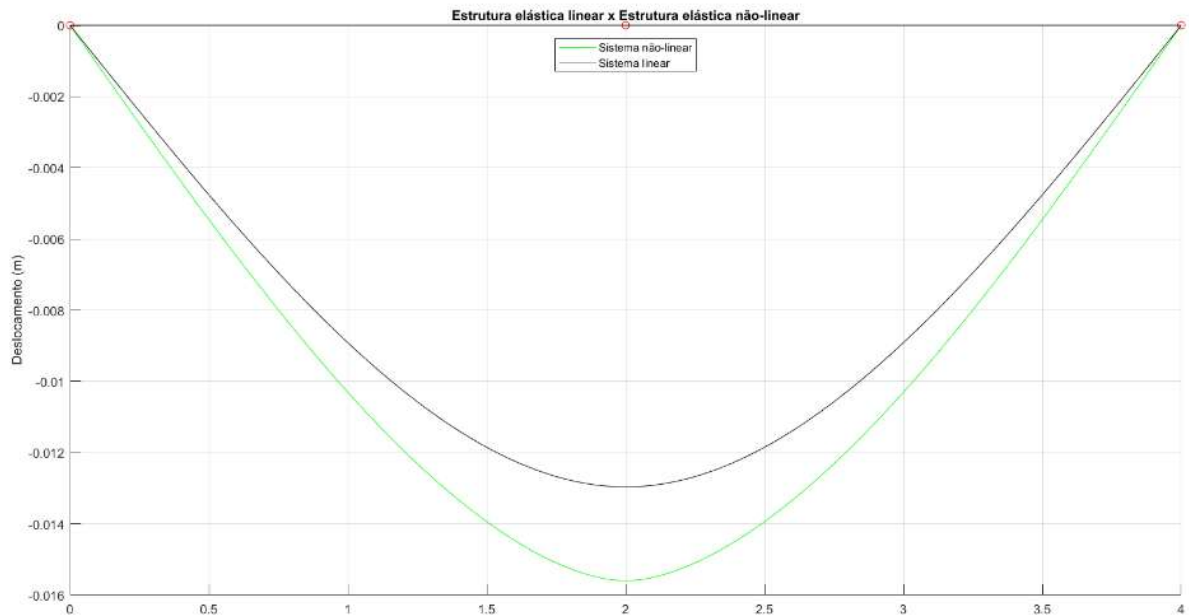


Fonte: Autoria própria

A Figura 21 apresenta a evolução do deslocamento vertical no centro do vão à medida que o carregamento aumenta, evidenciando o comportamento não linear da estrutura. Quando o regime plástico é atingido, a tangente do ponto se torna menor, e o deslocamento transversal tem seu crescimento acelerado.

Faz-se notar que o início da plastificação não implica em perda total de rigidez ou colapso da estrutura, como aconteceria se utilizado o método sem camadas exposto na seção 3.2.2.

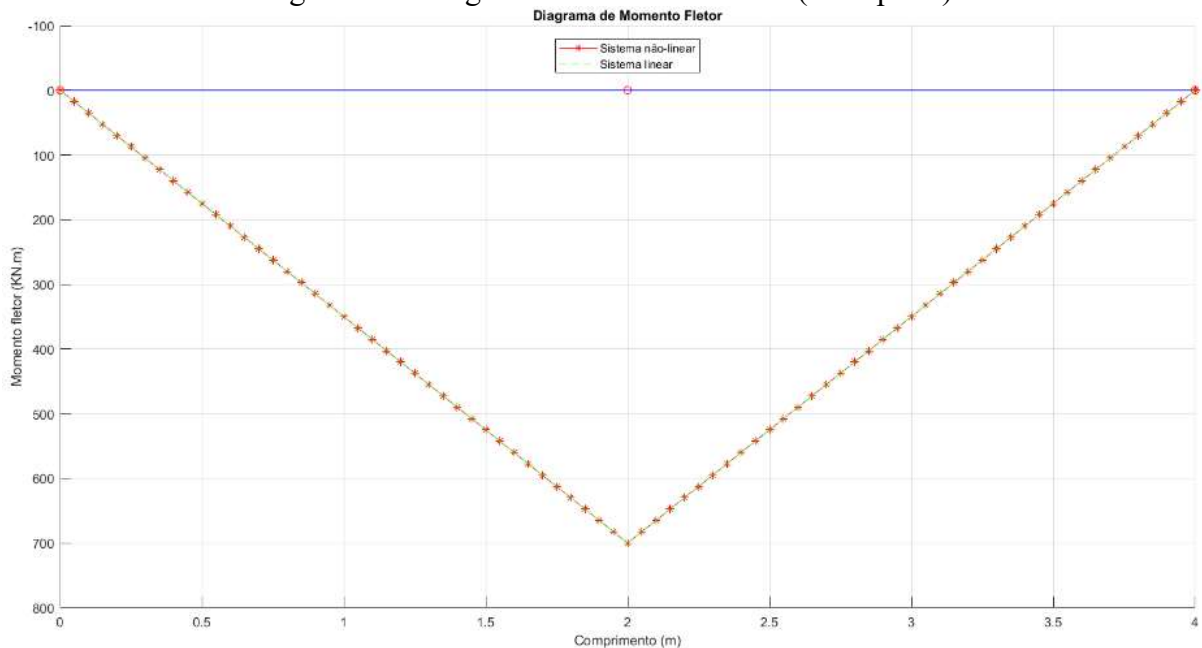
Figura 22 – Estrutura deformada (exemplo 1)



Fonte: Autoria própria

A Figura 22 apresenta a estrutura deformada após o carregamento. A linha verde representa a deformação considerando o material elástico não linear, já a linha preta representa a deformação considerando o material elástico linear. Como mostrado acima, a deformação para o sistema não linear precisou ser maior para absorver a energia, já que para o material elástico não linear considerado, ocorre a perda de resistência da seção à medida que se aumenta o carregamento.

Figura 23 – Diagrama de momento fletor (exemplo 1)



Fonte: Autoria própria

O diagrama de momento fletor (DMF) da estrutura foi traçado utilizando o material considerando a perda de rigidez e utilizando o material sem considerar a perda de rigidez. Como mostrado na Figura 23, o DMF para uma estrutura isostática não depende das características do material, logo os DMFs para ambos materiais são iguais e estão sobrepostos.

Foram selecionados alguns resultados obtidos através do relatório de saída do algoritmo e apresentados na Tabela 1. Analisando o segundo nó, que se encontra centro do vão, e correlacionando com os dados coletados pode-se definir que a análise feita através dos gráficos está correta.

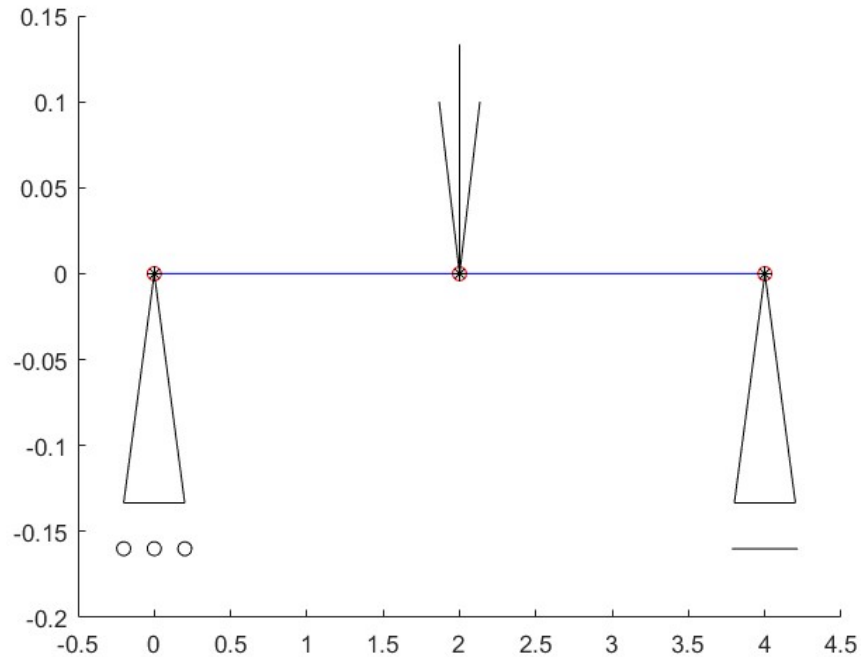
Tabela 1 – Exemplo 1

Exemplo 1		
	Momento (KN.m)	Deslocamento (mm)
Análise linear	700	-12,96
Análise não-linear	700	-15,57
Ponto analisado (m)	2	2

Fonte: Autoria própria

Ao fim da análise, o algoritmo traça a estrutura indeformada assim como as solicitações e apoios predefinidos. A Figura 24 foi gerada e com ela foi possível confirmar que a estrutura foi programada como esperado.

Figura 24 – Configuração da estrutura (Exemplo 1)



Fonte: Autoria própria

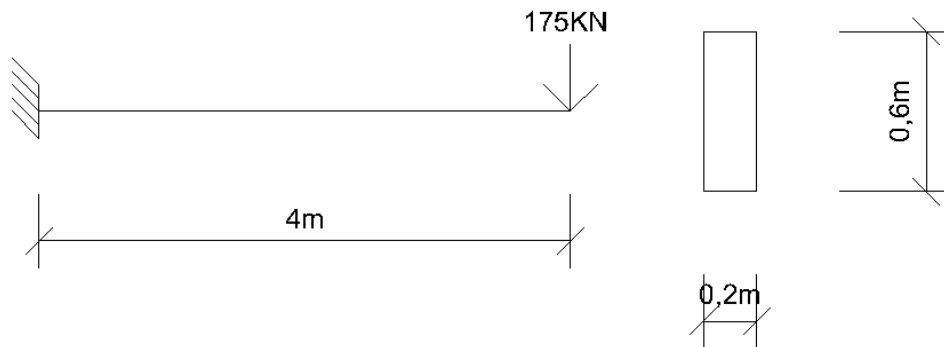
5.2 EXEMPLO 2

O segundo exemplo consiste em outra estrutura isostática, com uma solicitação em uma extremidade e engastada na outra extremidade. As características do material são iguais ao exemplo anterior, que são:

- Módulo de elasticidade longitudinal: 20 GPa;
- Tensão de escoamento do material: 40 MPa;

A estrutura está disposta geometricamente da seguinte forma:

Figura 25 – Exemplo 2

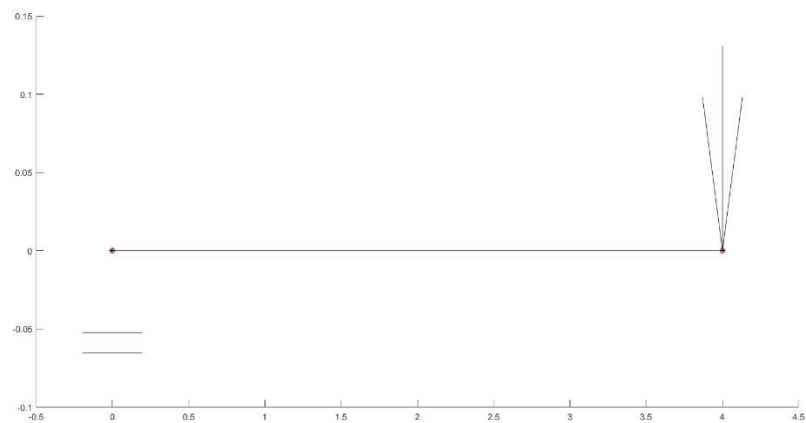


Fonte: Autoria própria

Como a seção transversal e as características do material do exemplo 2 são iguais aos do exemplo 1, os diagramas de momento x curvatura e rigidez transversal x momento são iguais e estão apresentados na Figura 19 e na Figura 20, respectivamente.

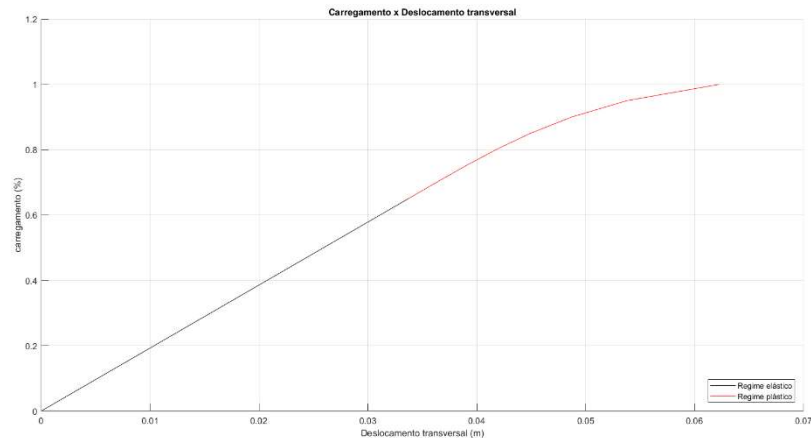
Após o pós-processamento do algoritmo, foi gerada a Figura 26 que atesta que a entrada de dados foi feita corretamente.

Figura 26 - Configuração da estrutura (exemplo 2)



Fonte: Autoria própria

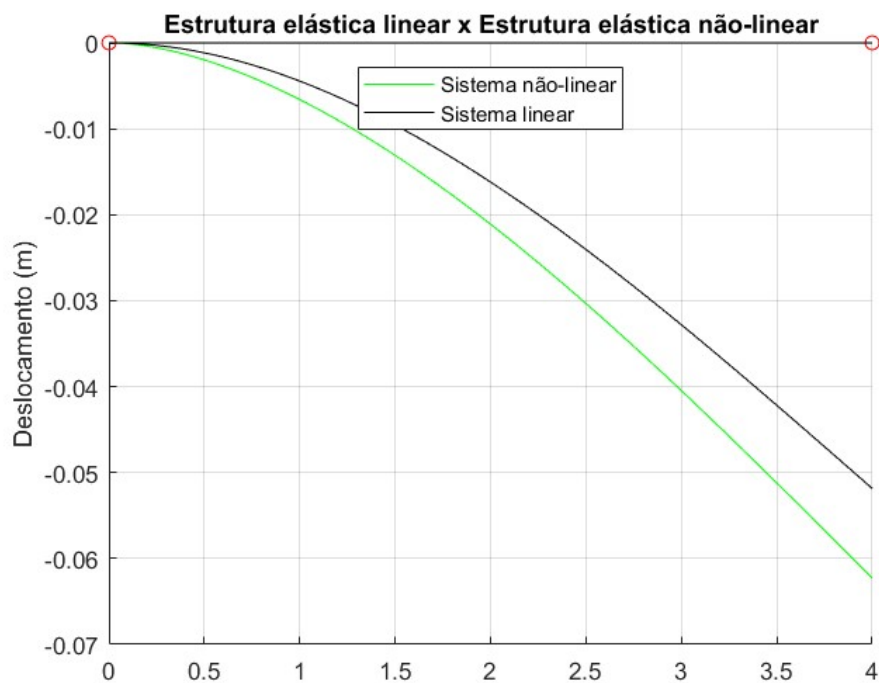
Figura 27 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 2)



Fonte: Autoria própria

A Figura 27 apresenta o gráfico da evolução do deslocamento da extremidade livre à medida que a carga é aumentada. A Figura 28 mostra a diferença dos deslocamentos fazendo a análise linear e a análise não linear. Ambas as figuras citadas atestam que a não linearidade física do material resulta em um aumento dos deslocamentos.

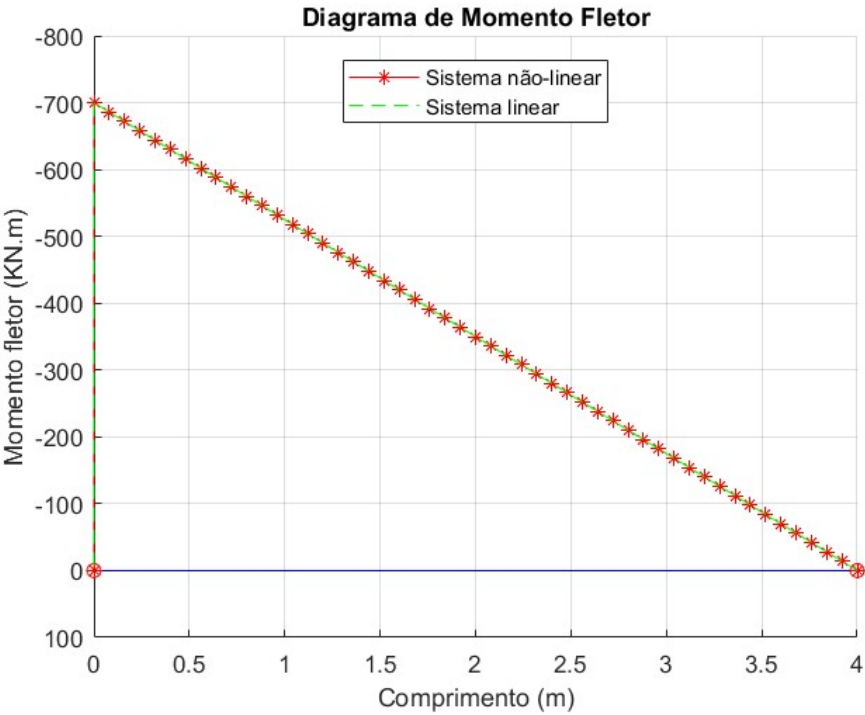
Figura 28 – Estrutura deformada (exemplo 2)



Fonte: Autoria própria

A Tabela 2 resume os resultados dos deslocamentos e momentos fletores da extremidade livre e da extremidade engastada, respectivamente. Como pode ser visto também na Figura 29, o diagrama de momento fletor não depende do material, já que a estrutura é isostática.

Figura 29 – Diagrama de momento fletor (exemplo 2)



Fonte: Autoria própria

Tabela 2 – Exemplo 2

Exemplo 2		
	Momento (KN.m)	Deslocamento (mm)
Análise linear	-700	-51,85
Análise não-linear	-700	-62,27
Ponto analisado (m)	0	4

Fonte: Autoria própria

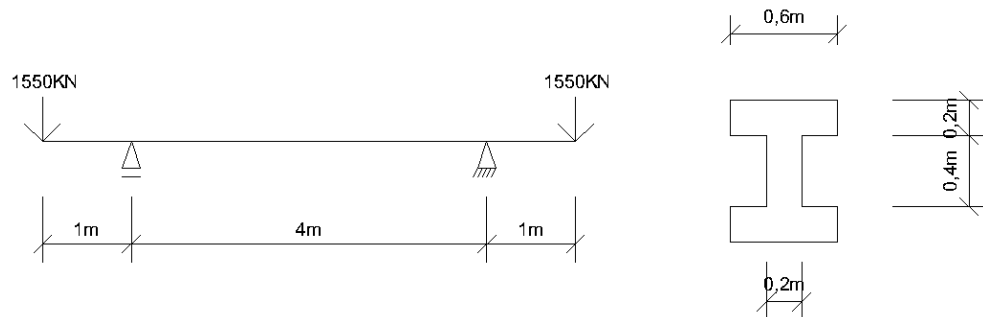
5.3 Exemplo 3

A terceira estrutura criada é uma estrutura isostática bi-apoiada, com 2 balanços e carregamentos em ambas as extremidades. A seção transversal é constante e tem formato I, como mostrado na Figura 30. As características do material foram alteradas para as seguintes:

- Módulo de elasticidade longitudinal: 200 GPa;
- Tensão de escoamento do material: 20 MPa;

A estrutura está disposta geometricamente da seguinte forma:

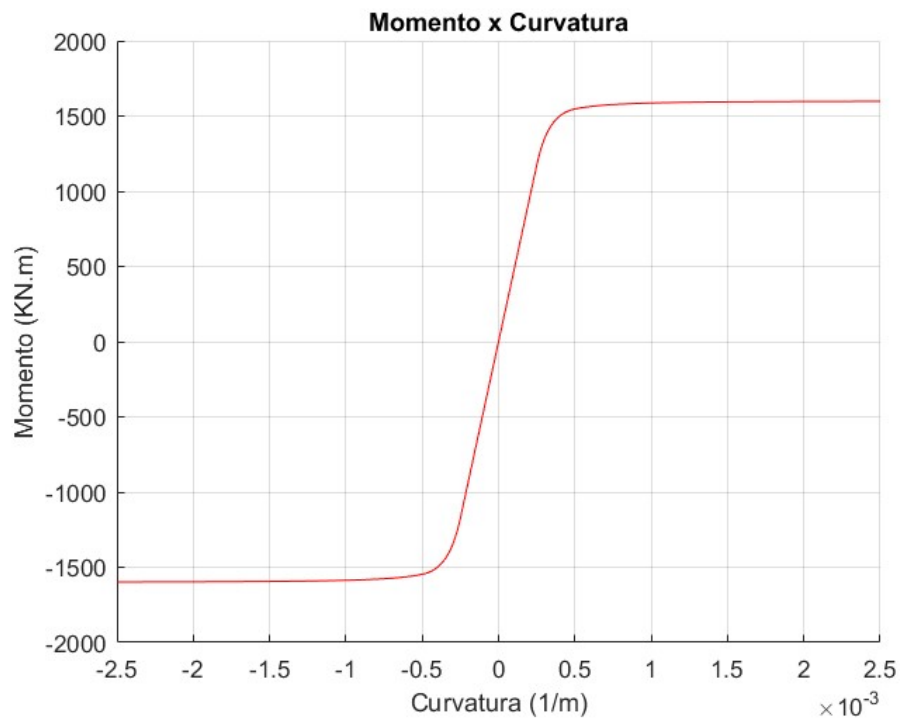
Figura 30 – Exemplo 3



Fonte: Autoria própria

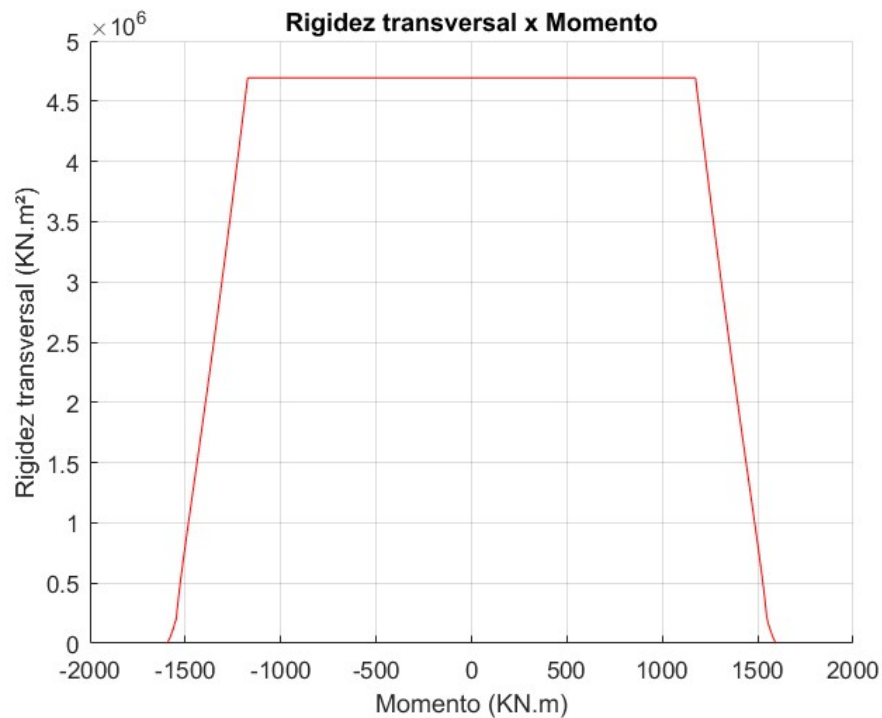
Para a situação apresentada na Figura 30 e as características do material definidas, foram obtidos os seguintes gráficos de momento x curvatura e rigidez transversal x momento.

Figura 31 – Momento x curvatura (exemplo 3)



Fonte: Autoria própria

Figura 32 – Rigidez transversal x Momento (Exemplo 3)

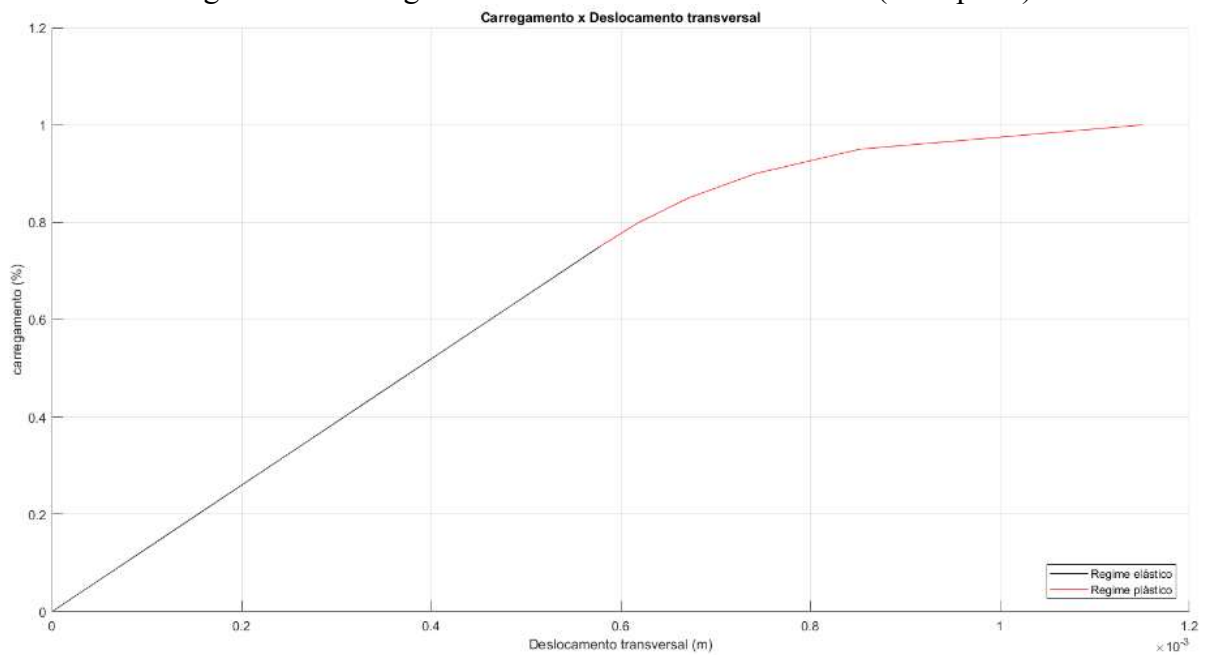


Fonte: Autoria própria

Fazendo o cálculo analítico foi obtido que o momento que inicia a plastificação da mesa é de aproximadamente 1.173,3 KNm , o momento que torna a mesa inteiramente plastificada é de aproximadamente 1.546,7 KNm e o momento que ocorre a formação da rotula plástica é de 1.600 KNm . O valor da rigidez transversal da seção foi calculado e é aproximadamente 4,69 GN.m^2 . Esses valores demonstram que a seção transversal I faz com que o material seja melhor aproveitado, sendo o material presente na mesa o principal responsável pela resistência ao momento fletor.

Comparando a Figura 31 e a Figura 32 com os resultados do cálculo analítico apresentados acima, é possível concluir que o algoritmo está simulando o material corretamente. O traçado dos gráficos tem pontos de inflexão nos locais esperados, que são os momentos de início da plastificação da mesa, início da plastificação da alma e formação da rótula plástica.

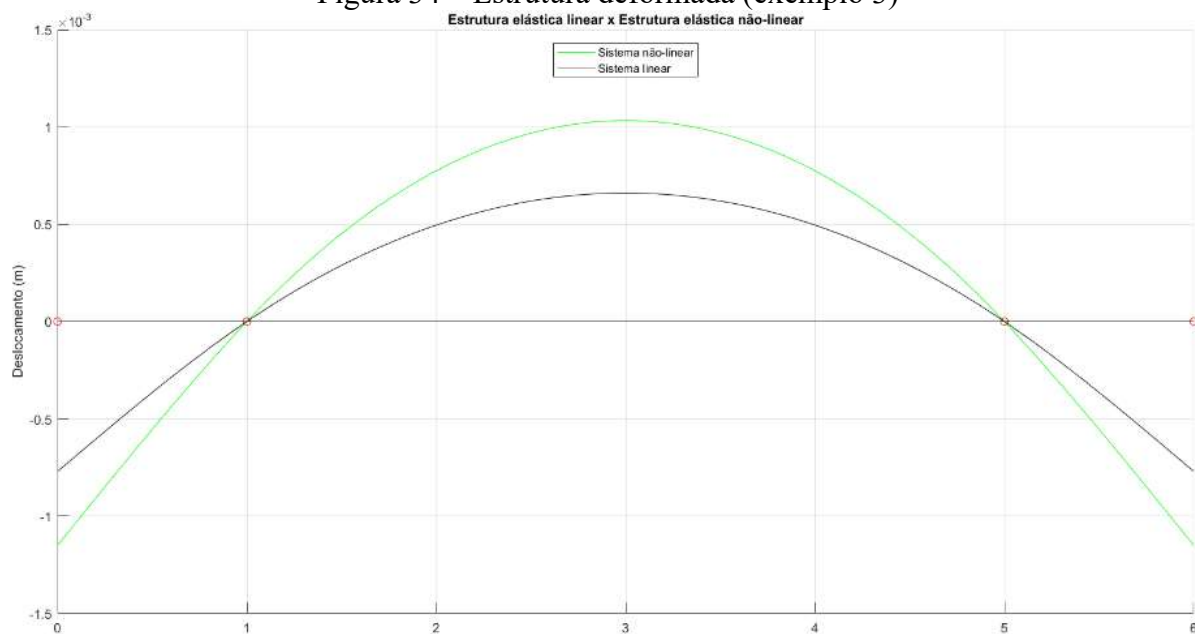
Figura 33 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 3)



Fonte: Autoria própria

A Figura 33 apresenta o gráfico da evolução do carregamento pelo deslocamento vertical da primeira extremidade. A linha de cor preta representa a faixa em que o deslocamento é linear com o carregamento, já a linha em cor vermelha representa a faixa que a seção trabalha no regime plástico, logo não segue linear.

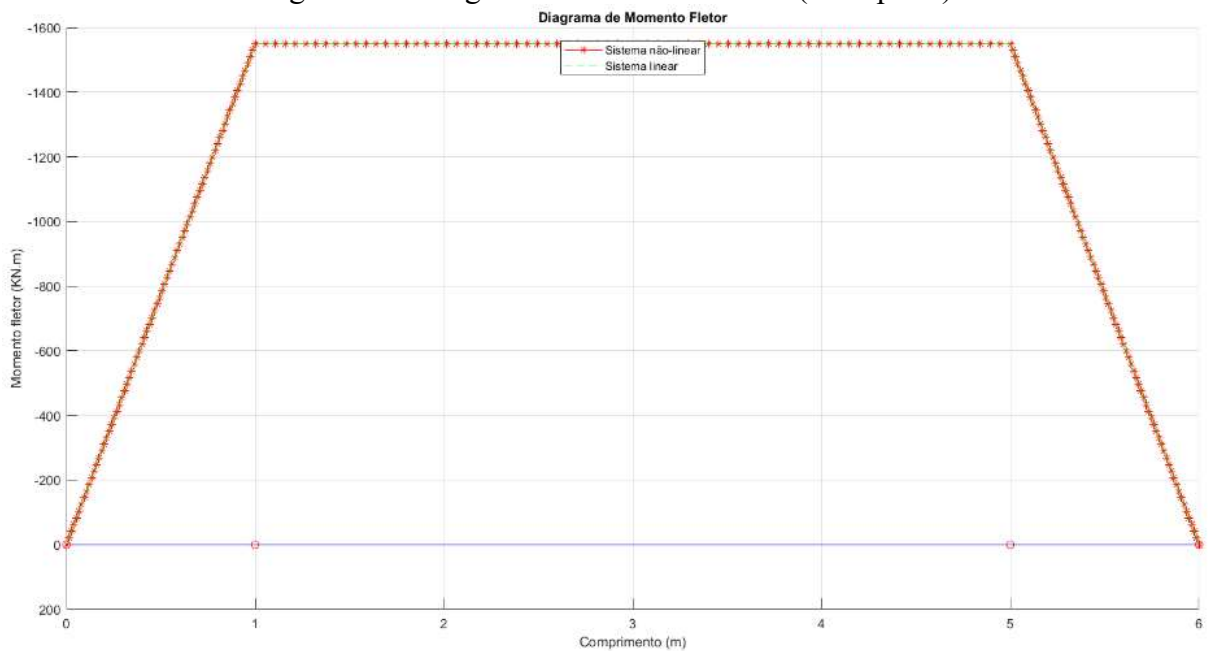
Figura 34 – Estrutura deformada (exemplo 3)



Fonte: Autoria própria

A linha plotada em preto na Figura 34 representa a deformação da estrutura utilizando a análise linear. Considerando a não linearidade física, foi possível obter a estrutura deformada representada pela linha verde, que está dentro do previsto já que ocorreu um aumento dos deslocamentos.

Figura 35 – Diagrama de momento fletor (exemplo 3)



Fonte: Autoria própria

Como visto nas estruturas apresentadas no exemplo 1 e exemplo 2, o diagrama de momento fletor não depende da seção transversal ou do material para uma estrutura isostática. Pela Figura 35 é possível observar o fato.

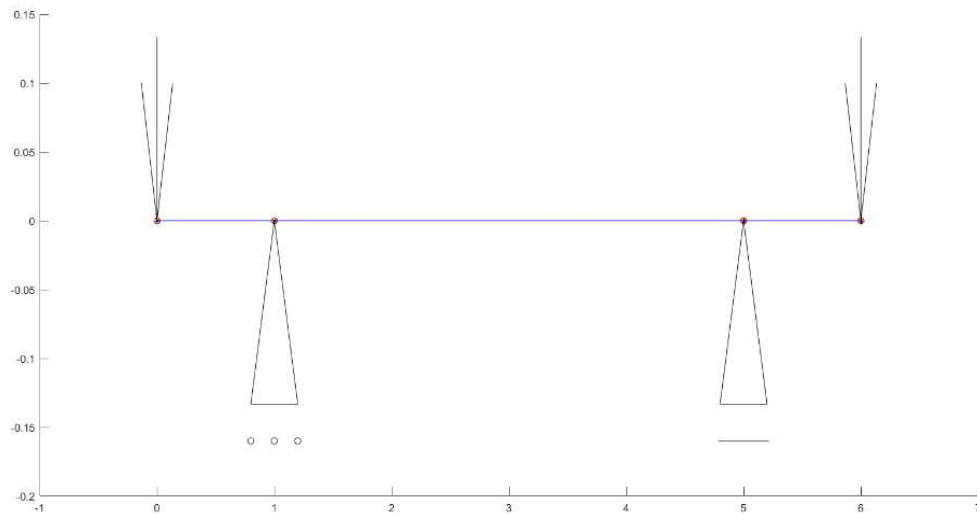
Tabela 3 – Exemplo 3

Exemplo 3			
	Momento (KN.m)	Deslocamento (mm)	Deslocamento (mm)
Análise linear	-1373	-0,77	0,66
Análise não-linear	-1373	-1,15	1,03
Ponto analisado (m)	1	0	3

Fonte: Autoria própria

Os dados apresentados na Tabela 3 foram coletados no relatório de saída, e mostra que o momento para uma estrutura isostática não depende do material, logo a não linearidade física não influencia no mesmo. Os deslocamentos dos pontos selecionados mostram que esse tende a crescer quando se analisa a estrutura considerando a não linearidade física.

Figura 36 – Configuração da estrutura (exemplo 3)



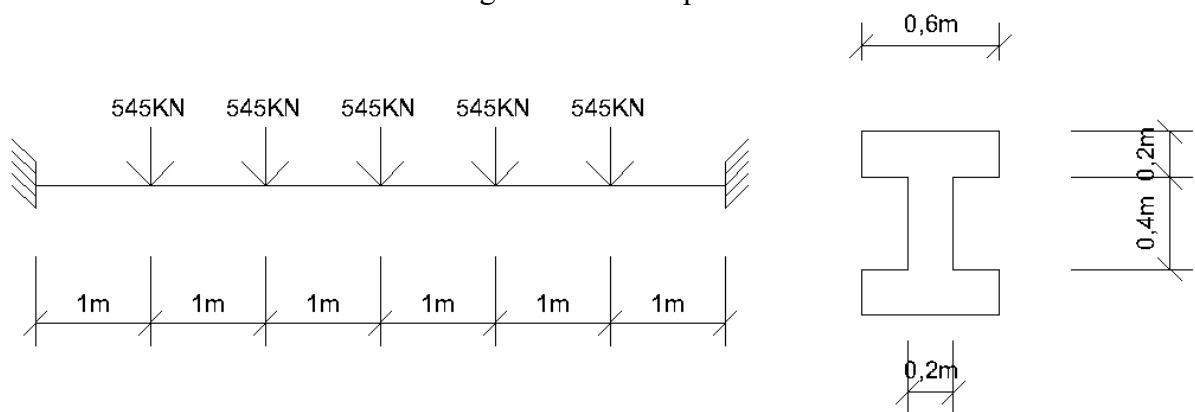
Fonte: Autoria própria

A Figura 36 retrata a configuração desejada para a estrutura, com isso pode-se concluir que o algoritmo processou os dados corretamente e apresentou resultados condizentes.

5.4 EXEMPLO 4

O quarto exemplo consiste em uma estrutura hiperestática, tendo suas extremidades engastadas e cinco carregamentos de igual intensidade e sentido para simular o efeito do carregamento distribuído. A Figura 37 representa a configuração desejada para a estrutura.

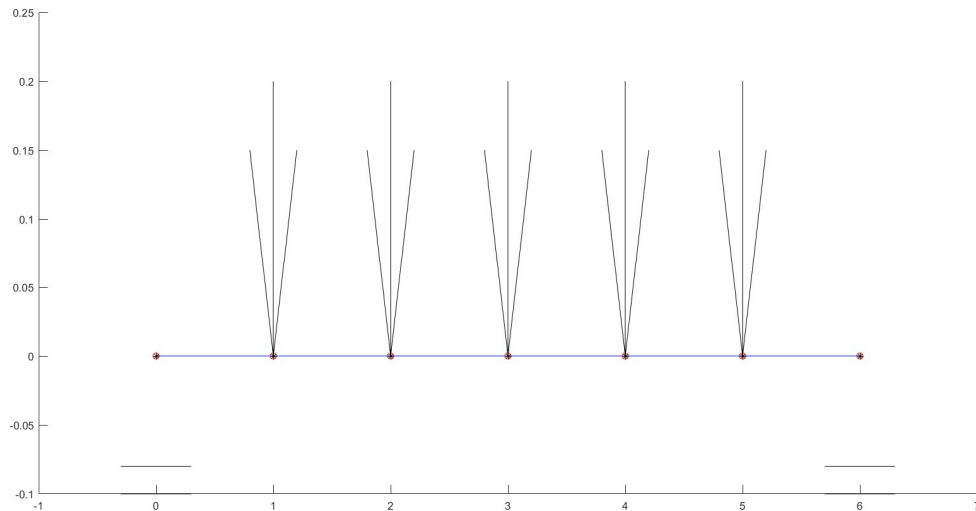
Figura 37 – Exemplo 4



Fonte: Autoria própria

As características do material e da seção transversal são as mesmas do exemplo anterior, logo os diagramas de momento x curvatura e rigidez transversal x momento estão representados na Figura 31 e na Figura 32, respectivamente.

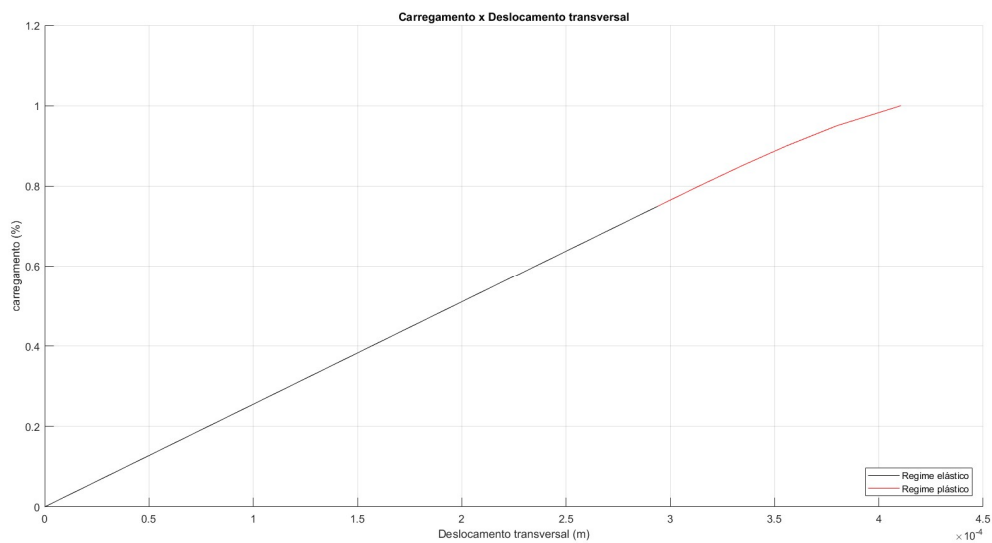
Figura 38 – Configuração da estrutura (exemplo 4)



Fonte: Autoria própria

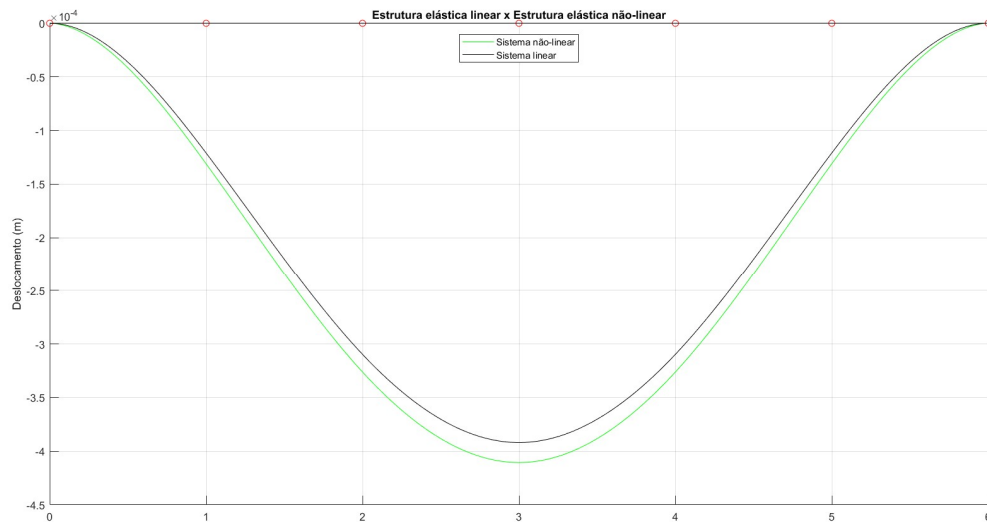
Ao fim do pós-processamento foi gerada a imagem da estrutura que o programa processou, assim pode concluir-se que a estrutura foi incrementada corretamente no script de entrada.

Figura 39 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 4)



Fonte: Autoria própria

Figura 40 - Estrutura deformada (exemplo 4)

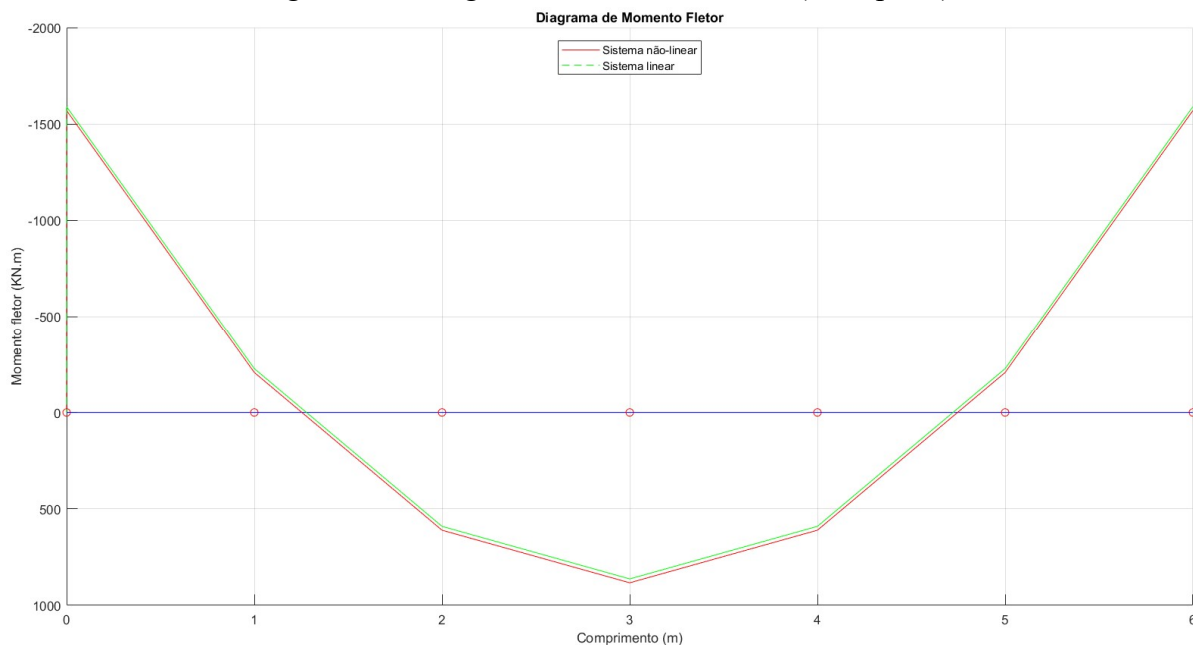


Fonte: Autoria própria

A Figura 39 é o gráfico que representa a evolução do deslocamento pelo acréscimo de carga no centro da viga, sendo a linha em vermelho a região em que o efeito da plastificação se inicia.

A Figura 40 representa em preto os deslocamentos da estrutura utilizando um material hookeano com as configurações iniciais do material. Em verde, pode ser visto o deslocamento da estrutura considerando o material elástico não linear.

Figura 41 - Diagrama de momento fletor (exemplo 4)



Fonte: Autoria própria

O DMF da estrutura está representado na Figura 41. Em vermelho estão plotados os momentos para um material elástico não-linear, já em verde estão os momentos para um material elástico linear.

Como a estrutura é hiperestática, a rigidez da barra interfere diretamente na distribuição dos esforços internos da estrutura. Na região em que os momentos ultrapassam o limite elástico para um material hookeano, ocorre uma diminuição dos mesmos para um material elástico não linear, isso é devido à perda de rigidez.

Tabela 4 – Exemplo 4

Exemplo 4			
	Momento (KN.m)	Momento (KN.m)	Deslocamento (mm)
Análise linear	-1590	862,9	0,39
Análise não-linear	-1569	883	0,41
Ponto analisado (m)	0	3	3

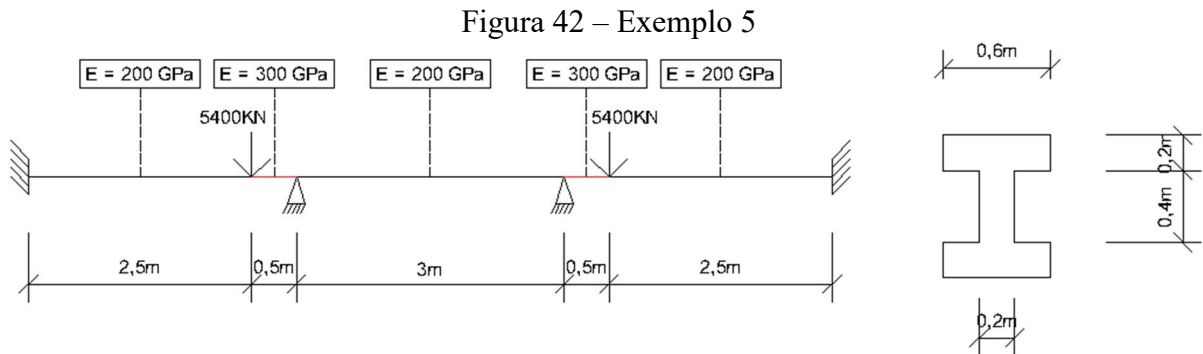
Fonte: Autoria própria

A Tabela 4 resume os momentos na extremidade e no meio do vão, assim como o deslocamento transversal no centro do vão. Pelo resumo é possível concluir que os deslocamentos tendem a aumentar para uma estrutura hiperestática, porém com menor intensidade que uma

estrutura isostática. Os momentos fletores para o sistema analisado sofrem alterações que dependem do material, isso está dentro do previsto, já que a região onde plastificação se inicia perde rigidez e acarreta em uma redistribuição dos esforços.

5.5 EXEMPLO 5

O último exemplo criado foi o de uma estrutura hiperestática com a seguinte configuração:



Fonte: Autoria própria

Existem 2 materiais distintos na estrutura, o material que constitui a maior parte da estrutura e aparece em preto tem como características:

- Módulo de elasticidade longitudinal: 200 GPa;
- Tensão de escoamento do material: 20 MPa;

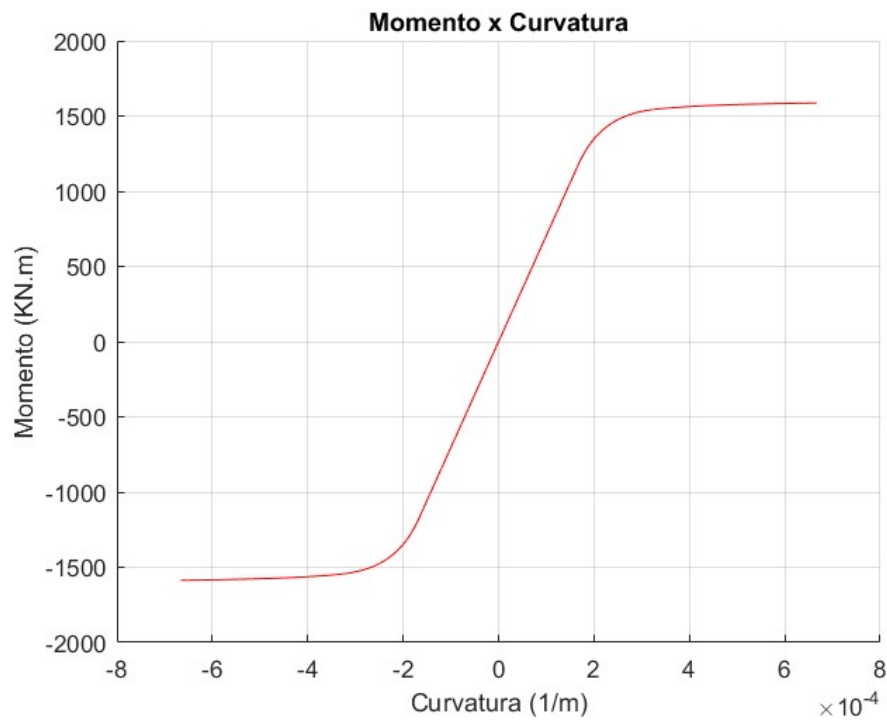
O outro material, representado em vermelho, tem as seguintes características:

- Módulo de elasticidade longitudinal: 300 GPa;
- Tensão de escoamento do material: 20 MPa;

Para a estrutura representada na Figura 42, a tensão de plastificação é de 20 MPa. As barras com módulo de elasticidade de 200 GPa têm os mesmos diagramas de momento x curvatura e rigidez transversal x momento que o exemplo 4, pois ambos os exemplos têm a mesma seção transversal e mesmas características do material constituinte. As figuras que representam os diagramas citados são as Figura 31 e Figura 32, respectivamente.

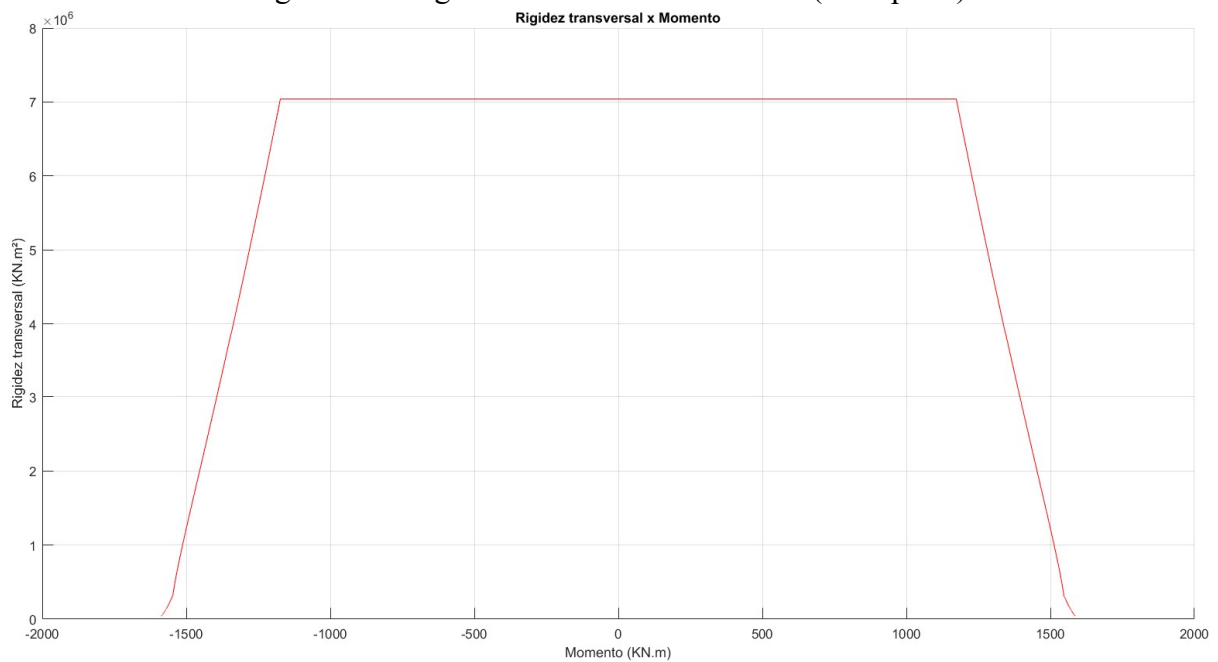
Os diagramas de momento x curvatura e rigidez transversal x momento das barras com comprimento de 0,5 metros representadas em vermelho e com módulo de elasticidade de 300 GPa são apresentados nas Figura 43 e Figura 44, respectivamente.

Figura 43 – Momento x curvatura (exemplo 5)



Fonte: Autoria própria

Figura 44 – Rigidez transversal x momento (exemplo 5)



Fonte: Autoria própria

Em comparação com o exemplo 4, os momentos que representam pontos de mudança na função permanecem os mesmos, porém as curvaturas necessárias para causar esses momentos diminuíram. A rigidez inicial da seção aumentou comparado ao exemplo 3 e tem valor igual a $7,04 \text{ GN.m}^2$.

A inserção de barras constituídas por materiais diferentes foi feita para verificar o comportamento da estrutura quando duas barras plastificam muito antes das demais. Após o processamento da estrutura foram encontrados os seguintes resultados.

Tabela 5 – Exemplo 5

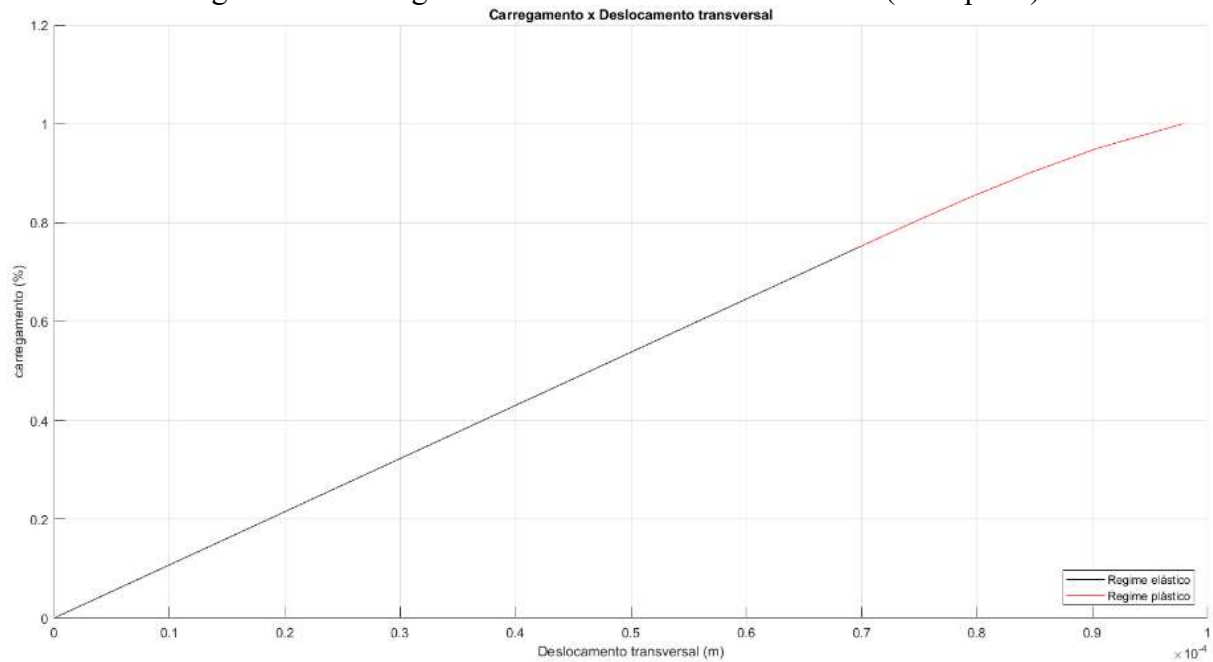
Exemplo 5				
	Momento (KN.m)	Momento (KN.m)	Deslocamento (mm)	Deslocamento (mm)
Análise linear	1586	-596,3	-0,093	0,143
Análise não-linear	1563	-624,2	-0,0979	0,15
Ponto analisado (m)	0	4,5	2,5	4,5

Fonte: Autoria própria

A Tabela 5 traz valores referentes ao segundo nó, onde o carregamento é aplicado, e no quarto nó, que é no centro da estrutura. Como foi constatado nos outros exemplos, os desloca-

mentos verticais aumentam quando a plastificação é considerada. Os momentos fletores calculados a partir da análise linear e da análise não linear foram diferentes, isso ocorre porque a estrutura agora é hiperestática, assim a perda de rigidez da barra interfere diretamente na distribuição dos esforços internos.

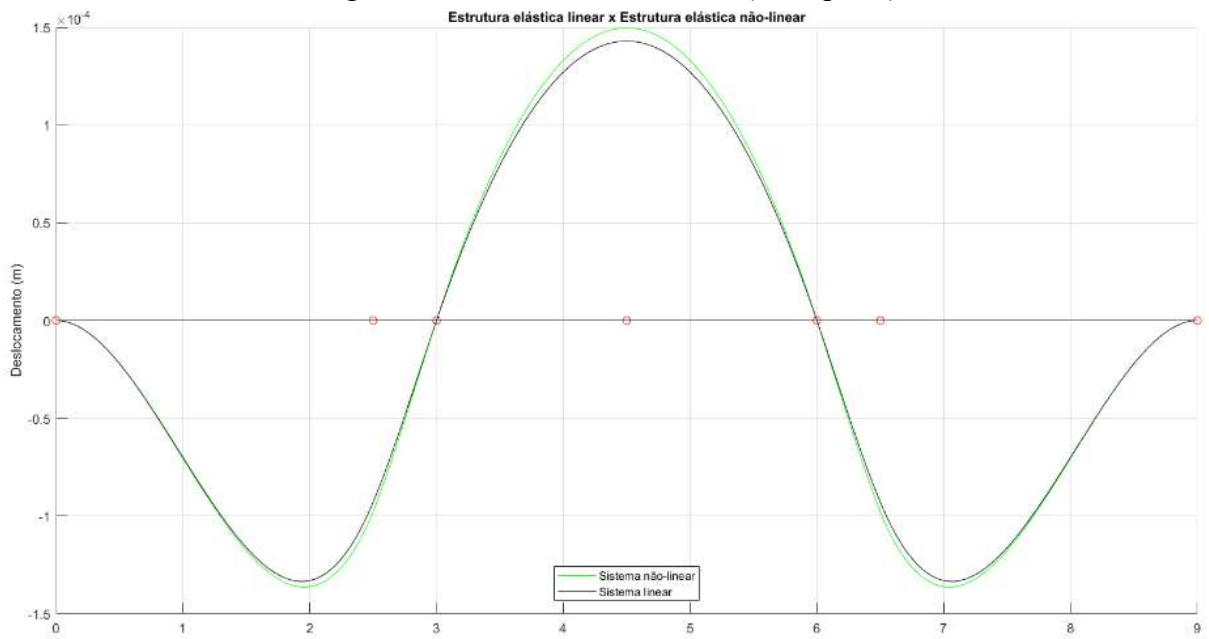
Figura 45 – Carregamento x deslocamento transversal (exemplo 5)



Fonte: Autoria própria

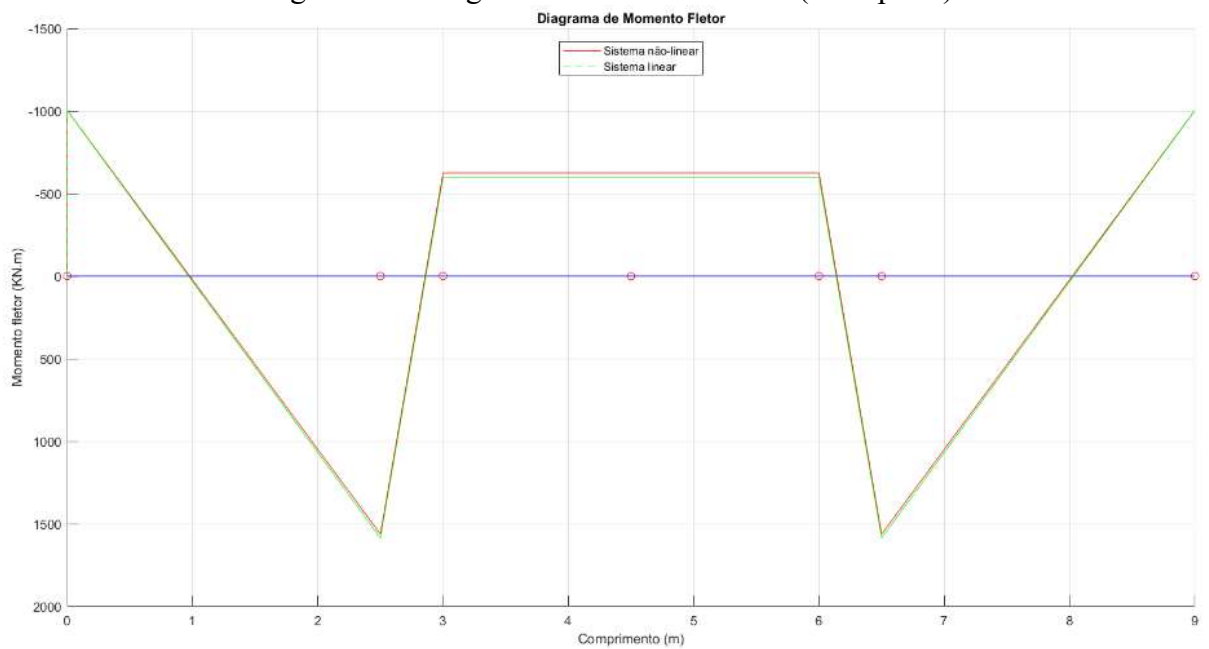
A Figura 45 mostra a evolução do deslocamento transversal do nó 2 ao longo da aplicação do carregamento. A Figura 46 apresenta os deslocamentos em toda a estrutura, sendo feita a análise linear e a análise não linear.

Figura 46 – Estrutura deformada (exemplo 5)



Fonte: Autoria própria

Figura 47 – Diagrama de momento fletor (exemplo 5)



Fonte: Autoria própria

A Figura 47 representa o DMF da estrutura considerando o material elástico linear e elástico não linear. Como visto na Tabela 5, ocorreu uma redistribuição do momento fletor devido a plastificação das barras e consequentemente uma perda de rigidez da barra.

6 CONCLUSÕES

O presente trabalho de conclusão de curso possibilitou o auxílio da compreensão do comportamento de uma estrutura constituída de material elástico não-linear submetida a flexão. Para uma melhor visualização do comportamento desse tipo de material, foi feita a comparação com um material elástico perfeito e foram gerados os deslocamentos, as tensões, as reações e as deformações.

As primeiras estruturas analisadas foram isostáticas e trabalharam próximas ao momento de formação da rótula plástica da seção, que caso ocorresse tornaria o sistema hipostático. Para esse tipo de estrutura, a perda de rigidez das barras acarreta em um aumento do deslocamento dos nós. Para critérios de dimensionamento, isso não implicaria no estado limite último, porém implicaria diretamente no estado limite de serviço.

As estruturas hiperestáticas analisadas também trabalharam próximas ao momento de formação de rótula plástica, sendo que para esse tipo de sistema a perda de rigidez das barras acarreta na redistribuição das tensões. Esse fato faz com que a não linearidade física do material tenha que ser contabilizada para os critérios de dimensionamento do estado limite último, além do estado limite de serviço.

O foco da pesquisa foi a análise de vigas, que são estruturas unidimensionais e que trabalham majoritariamente à flexão simples. Para trabalhos futuros, podem ser acrescentados as análises de flexo-compressão e flexo-tração, o que possibilitaria a análise de pilares e a criação de estruturas com hiperestaticidade interna, como quadros. A não linearidade geométrica é outro campo que pode ser acrescentado em trabalhos futuros, fazendo com que as deformações das barras criem tensões de segunda ordem.

O algoritmo foi programado de maneira que a parcela responsável pelas características do material ficasse destacada. Isso abre campo para incrementar outros tipos de diagramas de tensão x deformação, abrindo campo para a análise de estruturas constituídas de materiais como concreto e aço.

REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos Materiais**. 5.ed. Ed. AMGH, Ltda., 2011.
- BRANCO, A. L. L. V. **Análise não-linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos**. 87p. São Carlos, 2002. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 3.ed. Ed. John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- KASSIMALI, A. **Matrix analysis of structures** 2ª edição. Ed. Cengage Learning, Carbondale, 2010.
- MOREIRA, D. F. **Análise Matricial das Estruturas** 1ª edição. Ed. Da Universidade de São Paulo, 1977.
- OWEN, D. R. J.; HILTON, E. **Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice**. 1.ed. Ed. Pineridge Press Limited. 1980.
- PINTO, R. S. **Não-Linearidade Física e Geométrica no Projeto de Edifícios Usuais de Concreto Armado**. 108p. São Carlos, 1997. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996. ISBN 9788534602044.
- STRAMANDINOLI, R. S. B. **Modelo de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. Florianópolis, 2007. Dissertação (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina.

WIGHT, J. K.; MACGREGOR, J. G. **Reinforced concrete**: Mechanics and Design. 6.ed. Ed. Pearson, 2012.

HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Jornal of sound and vibration**. 255(5), 935-988. Rutgers, 1999.